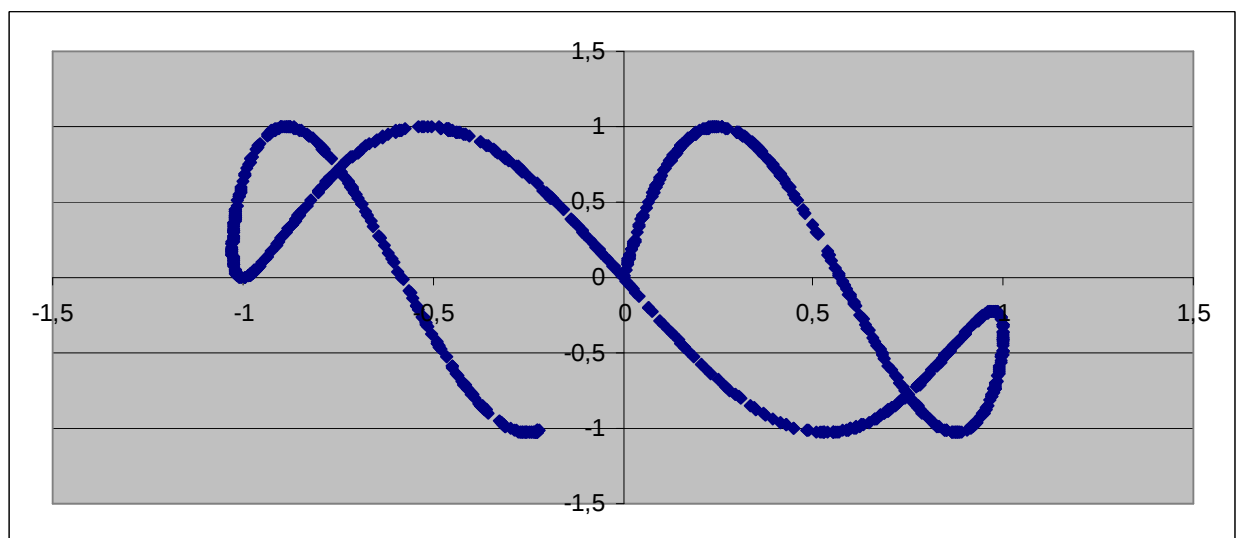


The MadMax



Inhaltsverzeichnis		Seite
Logistisches Wachstum – Struktur im Chaos	Axel Jacquet	3
Teilbarkeit spezieller Zahlen durch 6	Roman Ries	16
Fünfstellige Zahlen mit Bedingungen	Pavel Tcherniak	24
Ein dummer Roboter	Elijah Heiduck, Jannik von dem Berge und Pierre Lowet	25
Brennpunktspiegelungen an Parabeln	Cajus Zanoth	30

Liebe MadMax – Freunde,

in dieser Ausgabe greifen wir drei Themen aus den letzten Heften wieder auf (Logistisches Wachstum, Dummer Roboter und Brennpunktspiegelung) und stellen euch unsere neuen Erkenntnisse dazu vor. Neu sind die Themen von Roman und Pavel.

Das Titelbild dieser Ausgabe zeigt ein sogenanntes Poincaré .- Diagramm aus Axels Artikel.

Viel Spaß beim Lesen und Mitdenken

Euer MadMax –Team

Logistisches Wachstum – Struktur im Chaos

1. Logistisches Wachstum – was ist das?

Beim logistischen Wachstum hat man zuerst eine Anfangspopulation x_0 von Individuen. In festen Zeitschritten (Sekunden, Minuten, Stunden...) vermehrt sich die Population von Generation zu Generation erst exponentiell und nach einer bestimmten Anzahl von Zeitschritten schließlich langsamer. Dies liegt daran, dass sich die Anzahl der Individuen einem Grenzwert nähert, was an natürlichen Voraussetzungen wie beispielsweise an Platzmangel oder Fressfeinden liegt. Diese Anzahl schießt aber manchmal über den Grenzwert erst hinaus, fällt dann wieder darunter und so pendelt sich die Anzahl entweder an den Grenzwert heran oder sie kommt nicht näher sondern pendelt immer weiter um ihn herum. Dieses Verhalten soll in dieser Arbeit untersucht werden.

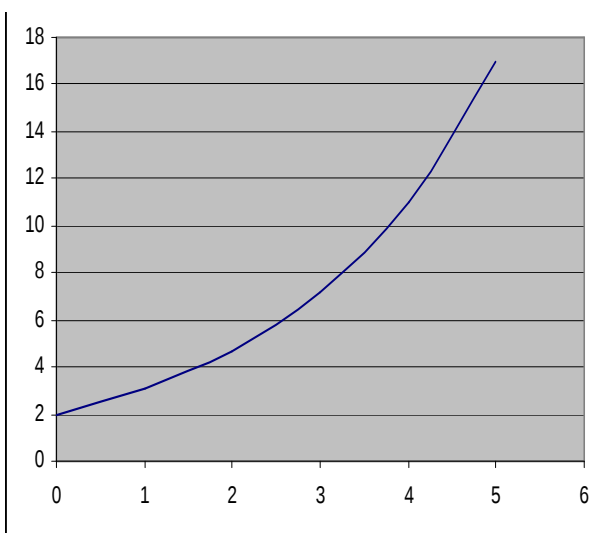
2. Die mathematischen Grundlagen

2.1 Exponentielles Wachstum

Wie eine Population wächst, kann die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n$$

In dieser Gleichung steht x für die Anzahl der Individuen, das können z.B. Bakterien oder Plankton sein. Weiter ist n die Anzahl der Zeitschritte, also ist $n+1$ ein Zeitschritt mehr als n . Der Faktor r steht für das Wachstum von Generation zu Generation und heißt Wachstumsfaktor. Wenn die Individuenanzahl nach einer Generation z.B. von 15 auf 23 gestiegen ist, dann beträgt $r = 23/15$ an.



Der Graph steigt immer weiter und steiler an. Dieses Wachstum nennt man exponentiell. Je grösser r ist, desto schneller steigt der Graph.

2.2 Logistisches Wachstum

2.2.1 Begrenzung des exponentiellen Wachstums durch einen Faktor

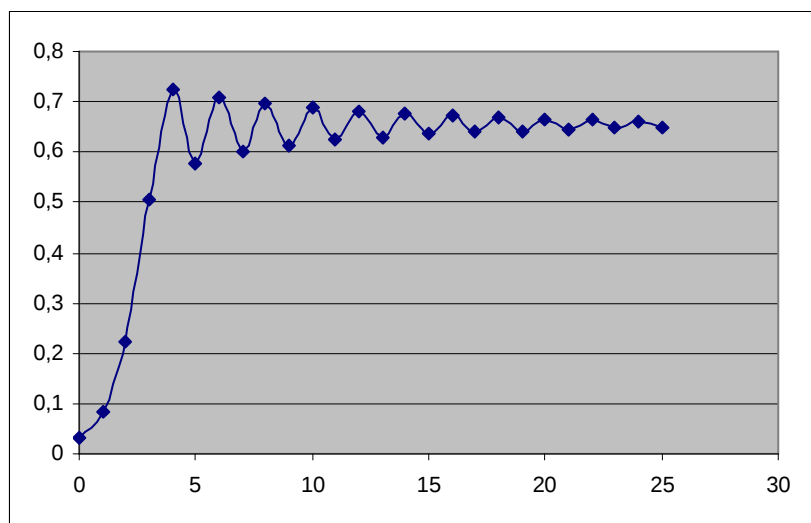
Exponentielles Wachstum ohne Grenzen tritt in der Natur nicht auf, da immer ein begrenzter Platz oder nur eine bestimmte Menge Nahrung vorhanden ist. Deshalb muss man in die Formel einen Faktor einfügen. Hier wird der Faktor $(1-x(n))$ verwendet:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

$(1-x(n))$ ist ein Faktor, der das Wachstum auf maximal 1 begrenzen soll.

Wenn man mit $x_0 < 1$ startet, dann ist der Faktor $(1 - x_0)$ zwischen 0 und 1 und bremst das exponentielle Wachstum ab, wie die folgende Exceltabelle mit $a(0) = 0,03$ und $r = 2,9$ zeigt:

n	a(n)
0	0,03
1	0,08439
2	0,22407815
3	0,50421469
4	0,72494849
5	0,57825472
6	0,70724098
7	0,60044841
8	0,69573934
9	0,61388973
10	0,68738448
11	0,62317247
12	0,68100278
13	0,62999019
14	0,6759974
15	0,63517225
16	0,67201254
17	0,63919389
18	0,66881268
19	0,64235661
20	0,66623032
21	0,64486569
22	0,6641404
23	0,64686799
24	0,6624464
25	0,64847238



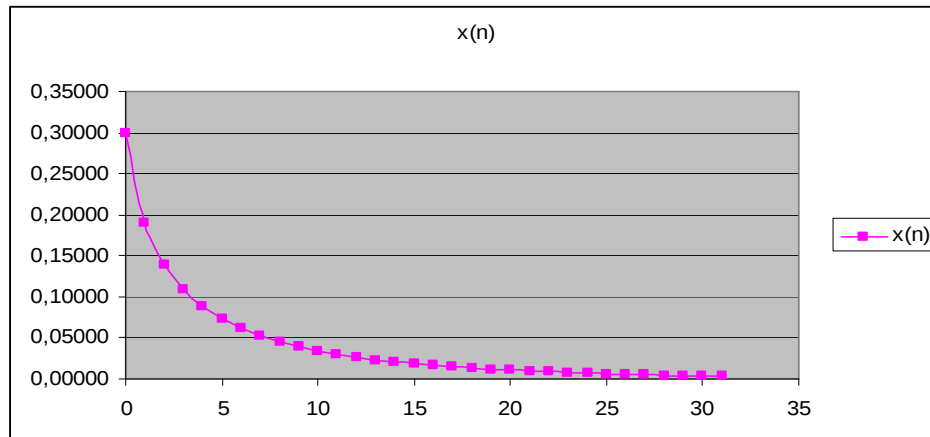
Die Population pendelt sich hier langsam auf einen Wert zwischen 0,6 und 0,7 ein.

2.2.2 Der Einfluss des Wachstumsfaktors r auf die Entwicklung der Population

Der Faktor r wurde mit einem Schieberegler in 0,001-er Schritten zwischen 0 und 4 variiert. Man kann verschiedene Stufen beobachten:

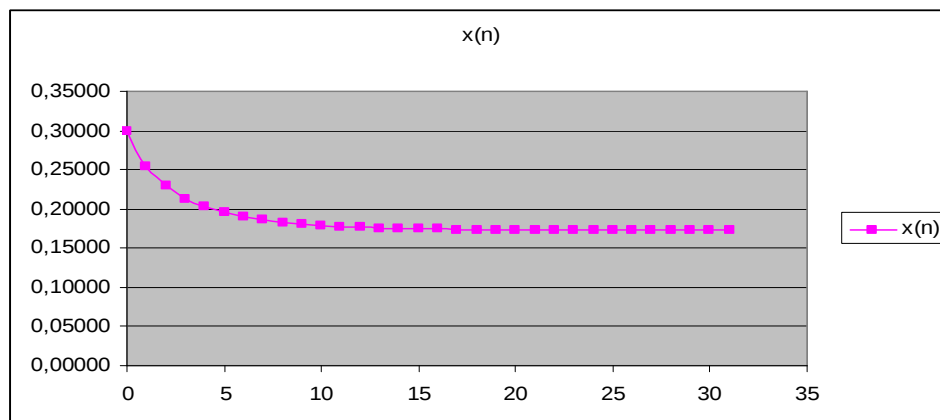
Stufe 1:

Die Population stirbt aus (Bsp. mit $r = 0,908$; so geht es bis ca. $r = 1$):



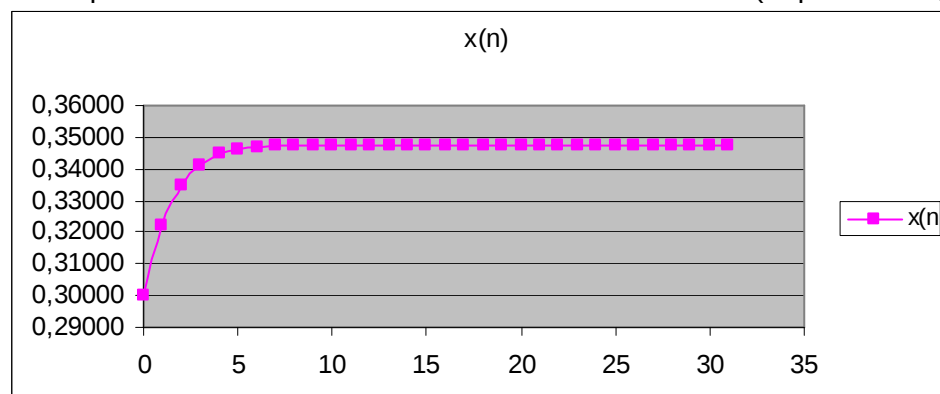
Stufe 2:

Die Population stirbt nicht aus und kommt auf einen Wert unter dem Startwert (Bsp. mit $r = 1,209$):



Stufe 3:

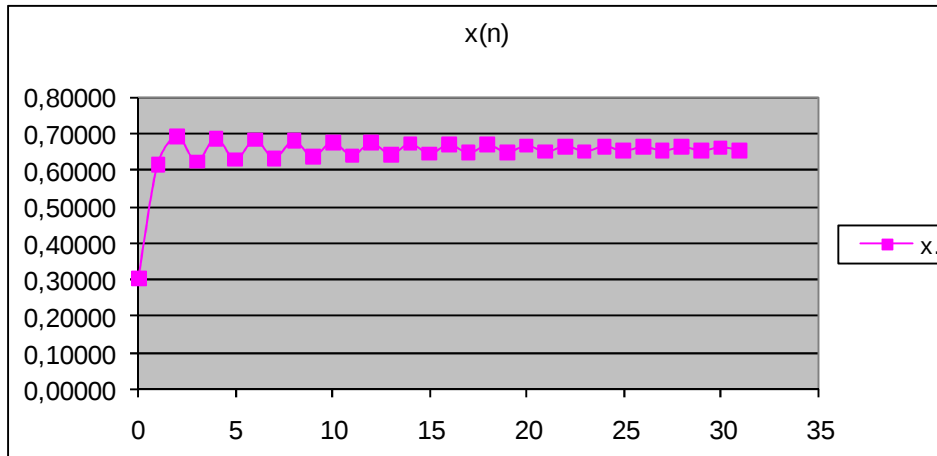
Die Population kommt auf einen Wert über dem Startwert (Bsp. mit $r = 1,503$):



Bis $r = 2,8$ sieht es so aus und die Endwerte wandern im Diagramm nur höher. Ab dann sind Veränderungen festzustellen:

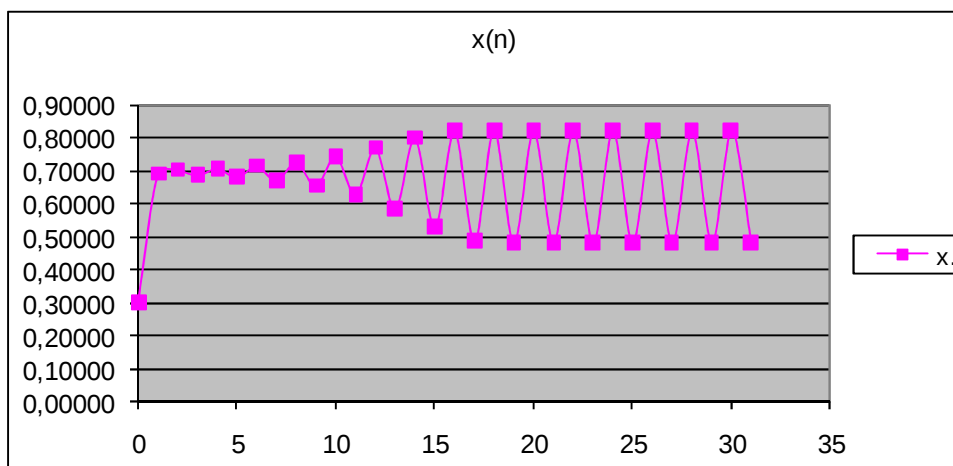
Stufe 4:

Die Population pendelt auf einen Wert zu (Bsp. mit $r = 2,929$):



Stufe 5:

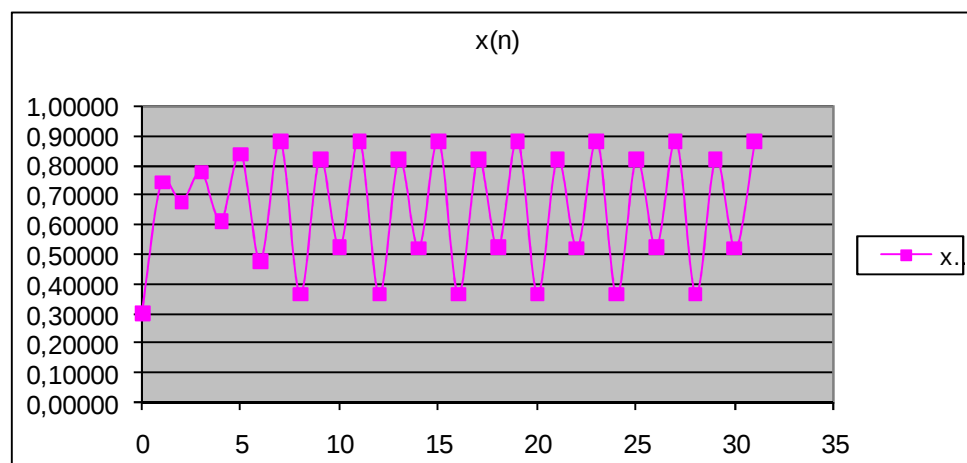
Pendeln zwischen 2 Werten (Bsp. mit $r = 3,313$):



Ab $r \approx 2,98$ entfernen sich die Werte voneinander und es bilden sich zwei horizontale Reihen.

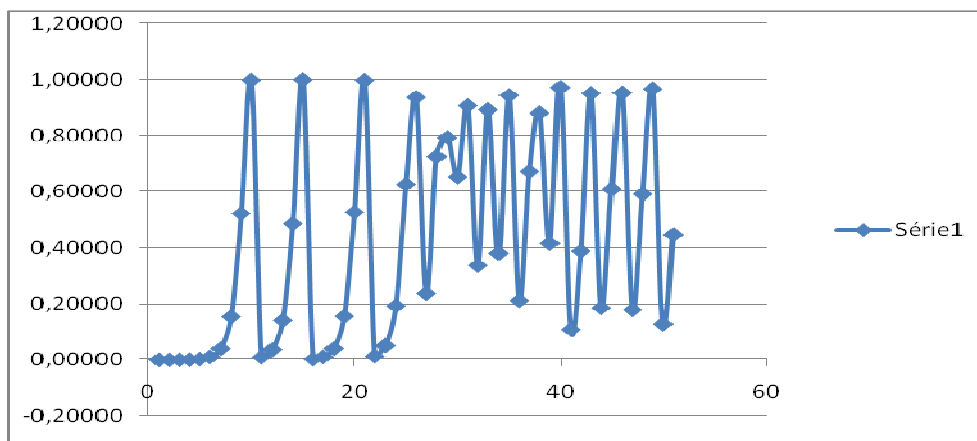
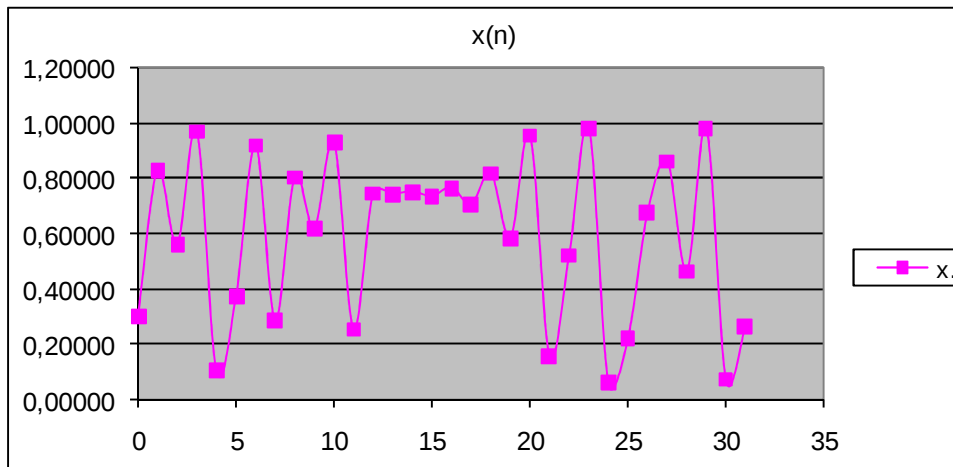
Stufe 6:

Der Graph pendelt zwischen vielen Werten (hier vier) hin und her (Bsp. mit $r = 3,565$):



Stufe 7:

Ab dann tritt scheinbares Chaos ein (Bsp. mit $r = 3,978$)

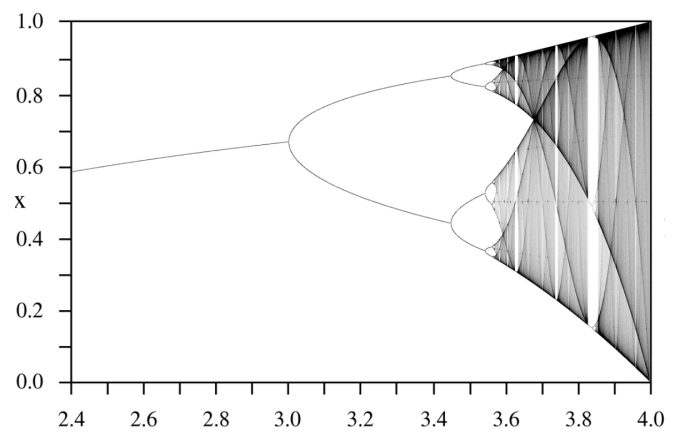


Struktur bei $r=4$ (maximal)

3. Chaos und Feigenbaumdiagramme

Mit dem sogenannten Feigenbaumdiagramm kann man zeigen, zwischen wie vielen Werten die Endstruktur im logistischen Wachstum hin und her springt. Dies hängt ja von r ab. Um es abzulesen nimmt man den gewünschten Wert von r und zeichnet eine Parallele zur y-Achse durch den Punkt, der auf der x-Achse gekennzeichnet ist. Das Feigenbaumdiagramm für logistisches Wachstum ist immer dasselbe, x spielt hierbei keine Rolle.

Man kann mit diesem Diagramm „vorhersagen“, wie viele Höhen es im Strichdiagramm geben wird, auf denen die Punkte letztlich liegen.



4. Poincare-Diagramme – Attraktoren zeigen eine Struktur im Chaos

Idee: Die Anzahl der Individuen selbst verändert sich bei bestimmten Werten von r chaotisch. Auch die Unterschiede zwischen zwei Populationen ändern sich dann chaotisch. Interessant wird es, wenn man immer zwei aufeinanderfolgende Differenzen ins Diagramm einträgt

Zuerst wurde versucht, ein solches Diagramm zu bilden. Dazu brauchte man die Differenzen $x(n+2) - x(n+1)$ und $x(n+1) - x(n)$.

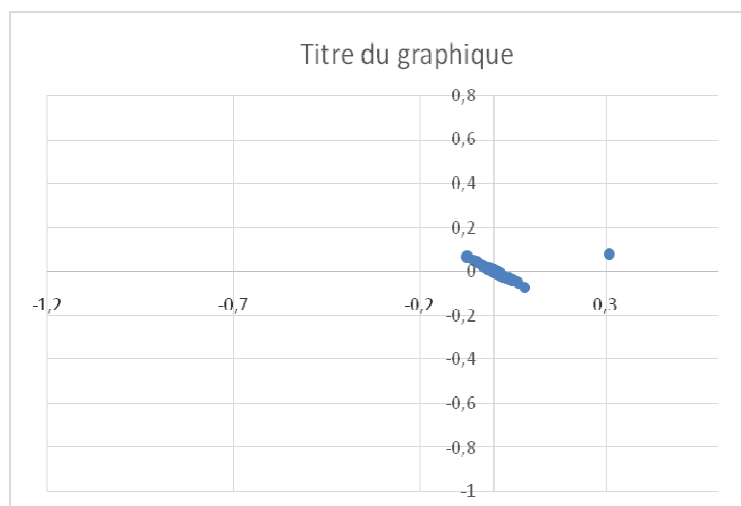
$x(n+1) - x(n)$	$x(n+2) - x(n+1)$
0,53664	-0,29213
-0,29213	0,44360
0,44360	-0,94129
-0,94129	0,13096
0,13096	0,40457
0,40457	0,38664
0,38664	-0,84925
-0,84925	0,30017
0,30017	0,55054
0,55054	-0,85615
-0,85615	0,28900
0,28900	0,55545
0,55545	-0,80112
-0,80112	0,37135
0,37135	0,46370
0,46370	-0,96362

Auch hier kann man die Diagramme in unterschiedlichen Stufen kategorisieren:

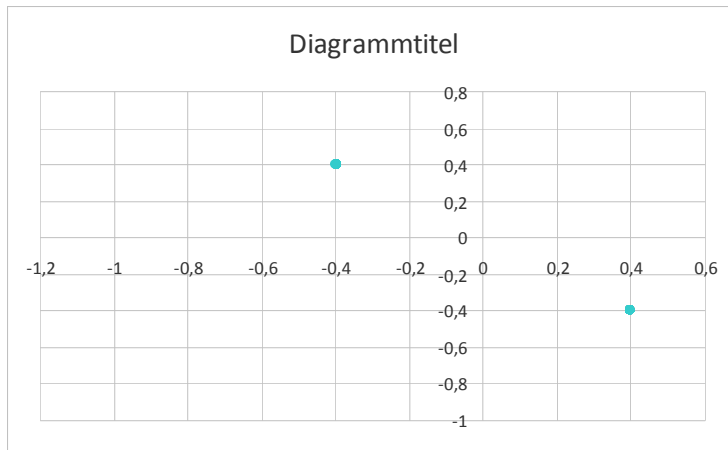
Stufe 1: $r = 0$ bis ca. 2,9

Viele der Differenzen liegen auf $(0 / 0)$.

Manche Populationen liegen jedoch nicht auf diesem Punkt, was damit zusammenhängt, dass die Population erst nach ein paar Generationen ausstirbt oder etwas Zeit braucht um sich auf einen endgültigen Wert einzupendeln.

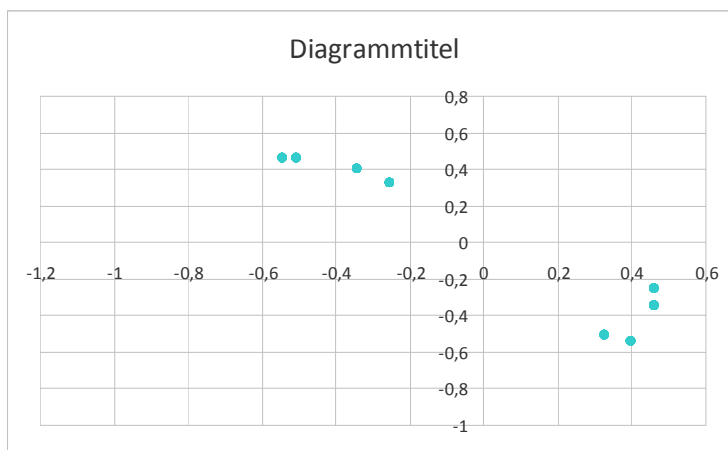


Stufe 2: Die aufeinanderfolgenden Differenzen bilden 2 Punkte, da die Werte auch zwischen zwei Differenzen schwanken (r ab 2,9).



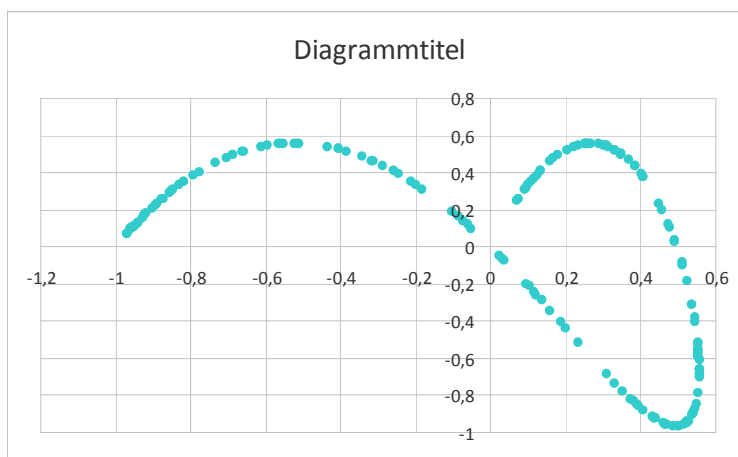
Stufe 3:

Es bilden sich immer mehr unterschiedliche Differenzen, also gibt es auch immer mehr Punkte im Diagramm.



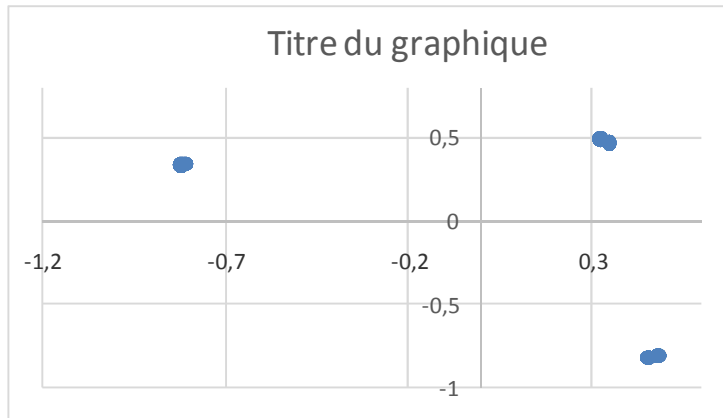
Stufe 4:

Die immer mehr werdenden Differenzen (=> Feigenbaumdiagramm)
Bilden im KOSY eine Schlangenlinie.



Überraschende Feststellung:

An einigen Stellen verschwinden die Strukturen im Diagramm kurzzeitig wieder und es sind nur noch ein paar Punkte festzustellen. Dies passt allerdings wiederum zum Feigenbaumdiagramm, in dem man auch bei manchen höheren r -Werten wenige $x(n)$ -Werte herauskommen, wie hier bei $r = 3,845$.



5. Was passiert, wenn man die logistische Gleichung ändert?

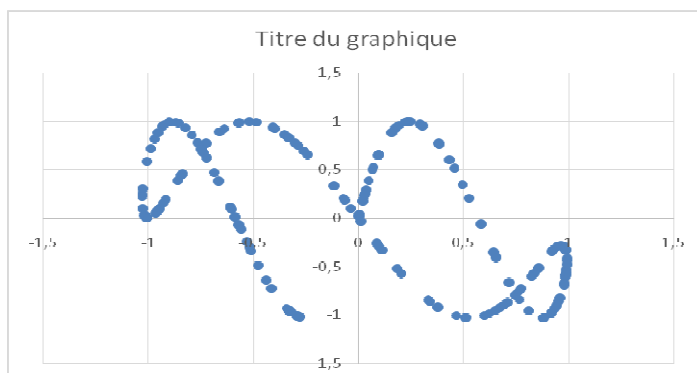
Das ist die ursprüngliche Formel, die ich nun verändern möchte:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

Die Idee ist, mit einer Potenz des Begrenzungsfaktors zu arbeiten und zu untersuchen, was dann geschieht. So sieht meine erste modifizierte Formel aus:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)^2$$

Im Diagramm sieht man die typische „Schleifenbildung“, wie sie auch schon vorher auftrat, nur dass es mehr Schleifen sind und sie sich jetzt über alle Quadranten verteilen.



In diesem Beispiel ist $r = 8,835$ und der Exponent $c = 2$.

Auch im dritten Quadranten gibt es Punkte, was heißt, dass die Population zweimal hintereinander sinkt. Beim Überprüfen in der Tabelle war das dann der Fall, wenn das $a(n)$ auf das sich die erste Differenz bezieht über ca. 1,2 groß ist.

1,32933396 1,297626286 1,01686431 0,03170767
 1,29762629 1,034510045 0,03170767 0,26311624
 1,03451005 0,011088385 0,26311624 1,02342166
 0,01108838 0,097594591 1,02342166 0,08650621
 0,09759459 0,71527268 0,08650621 0,61767809
 0,71527268 0,521882132 0,61767809 0,19339055

- Diese $a(n)$ sind über ca. 1,2 groß,
 deswegen sind diese Differenzen beide
 negativ.
 Da die Zahlen sogar zweimal über 1,2
 groß sind, sind zwei Differenzenpaare
 hintereinander negativ.

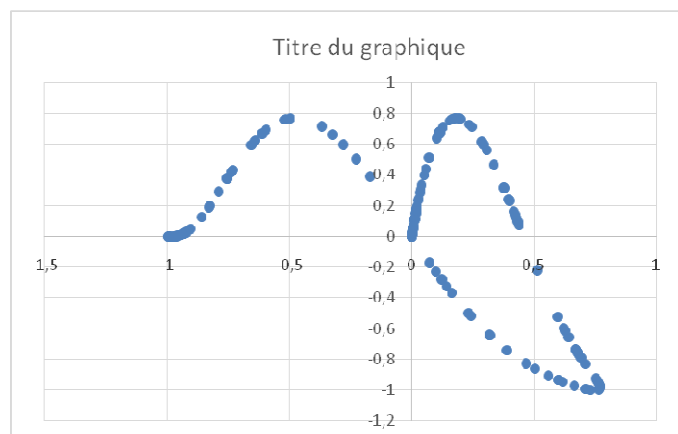
Zuerst ist mir aufgefallen, dass die maximalen Werte von r immer größer werden, aber keine
 Regelmäßigkeit feststellbar ist. Bei Erhöhung von c sinkt $r(\max)$ manchmal sogar wieder. Ich
 habe die Ergebnisse bei verschiedenen Werten der Exponenten in einer Tabelle dargestellt:

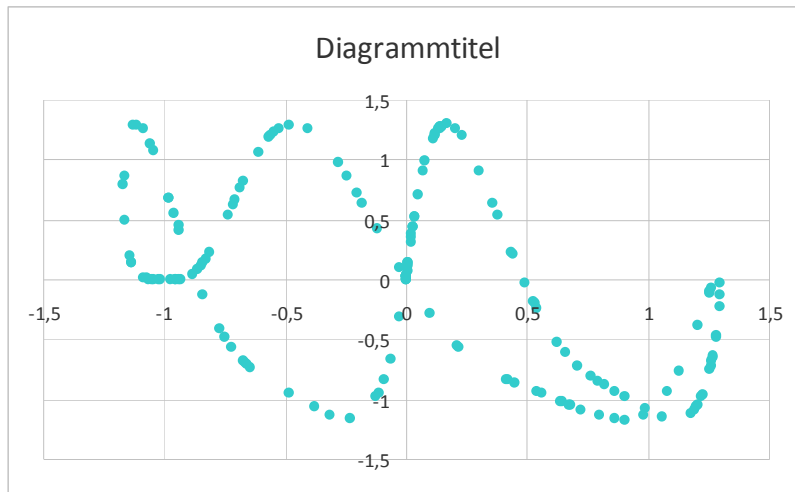
Potenz (c)	Wert von $r(\max)$
1	4
2	9
3	9,49
4	18,14
5	14,93
6	27,8
7	20,38
8	37,76
9	25,82
10	47,94
20	99,97
30	153,0
40	207,3
50	260,0
100	530,1
200	1149

Am Anfang habe ich vermutet, dass das
 maximale $r = (c+1)^2$ ist, wobei c für den
 Exponenten steht. Leider trifft dieser
 Anfangsgedanke nicht oder zumindest nur
 bei den ersten beiden Werten zu.

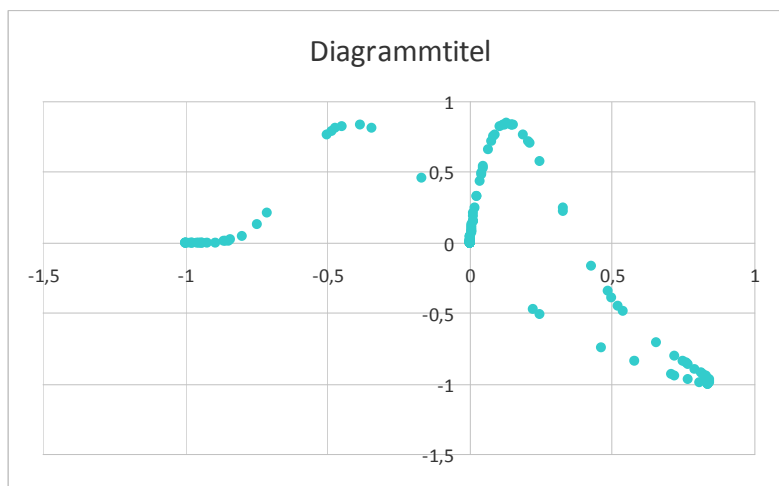
Dann habe ich die Schleifen genauer
 untersucht:

$c = 3$, $r(\max) = 9,49$

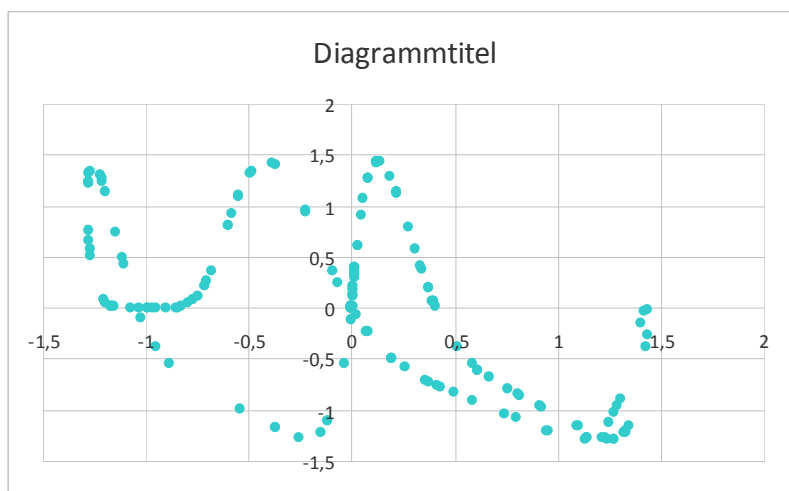




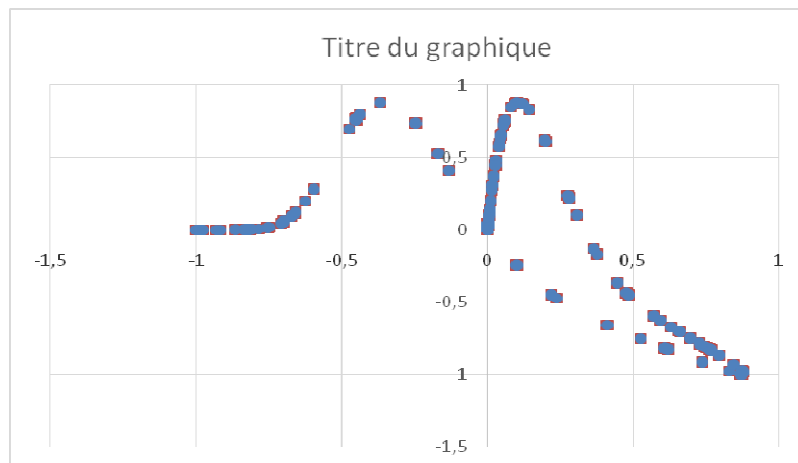
$c = 4$, $r(\max) = 18,14$



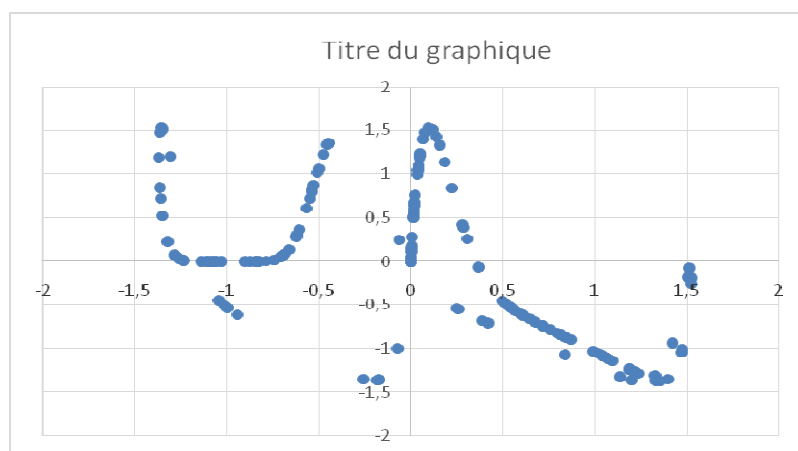
$c = 5$, $r(\max) = 14,93$



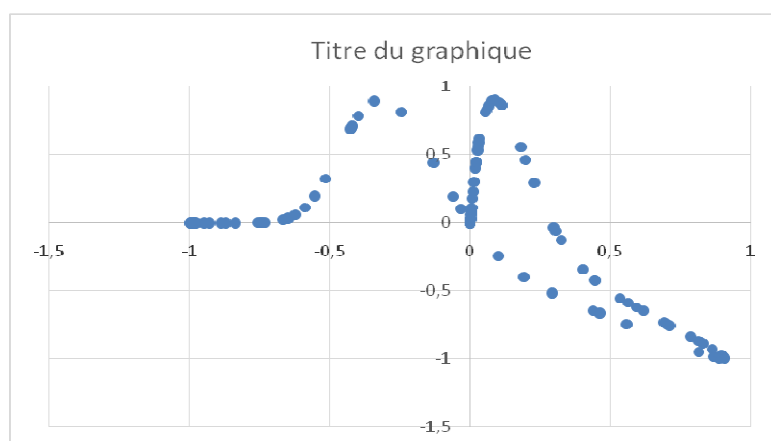
$c = 6$, $r(\max) = 27,8$



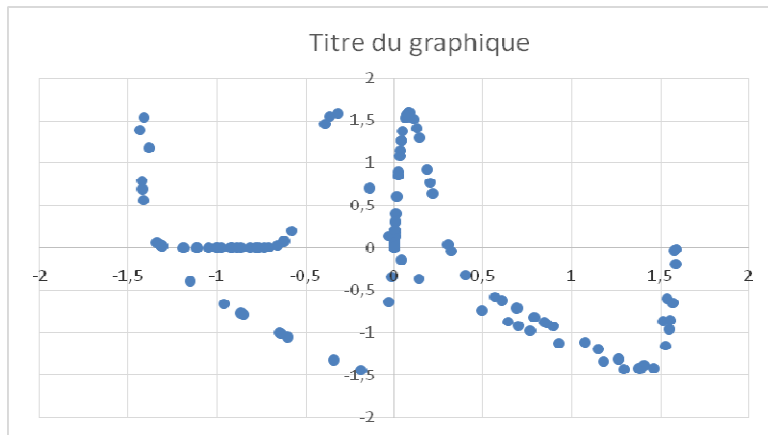
$c = 7$, $r(\max) = 20,38$



$c = 8$, $r(\max) = 37,76$



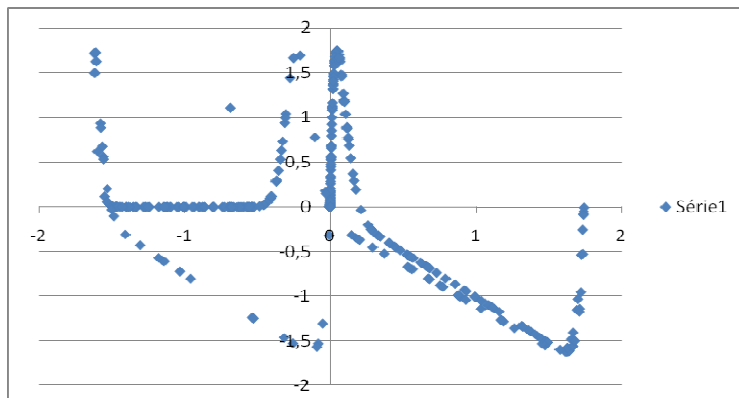
$c = 9$, $r(\max) = 25,82$



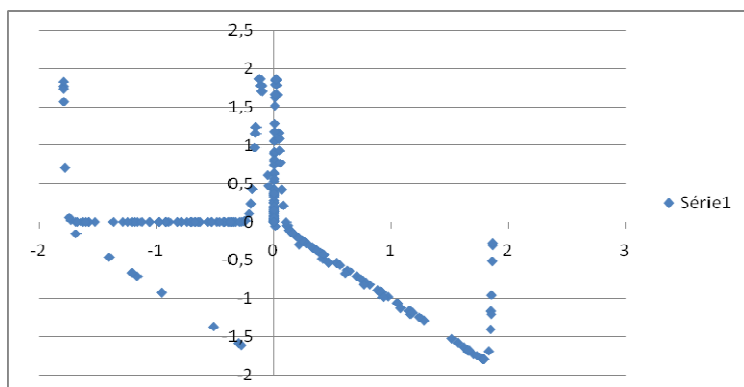
$c = 10$, $r(\max) = 47,94$

Ergebnis: Bei ungeraden Potenzen sieht es ähnlich aus wie beim einfachen logistischen Wachstum: es gibt nur eine ganze Schleife und ein Ende im zweiten Quadranten. An diesem Ende bildet sich bei geradem Exponenten dann noch eine Schleife. Bei geraden Potenzen gibt es nämlich vier Schleifen, die ineinander übergehen. Dort gibt es keinen Anfang und kein Ende.

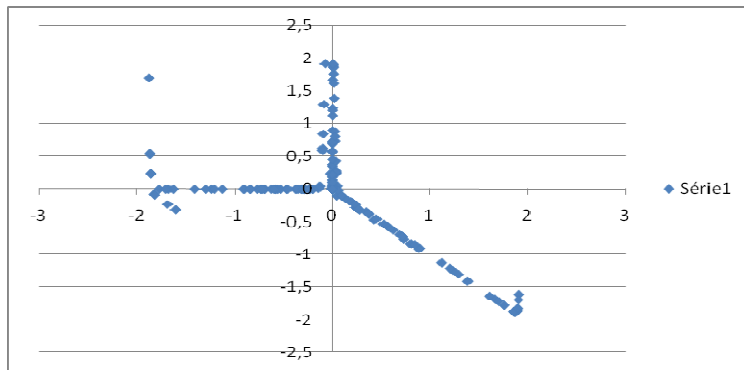
Die nächsten Bilder zeigen, wie Diagramme mit extrem hohen Exponenten aussehen.



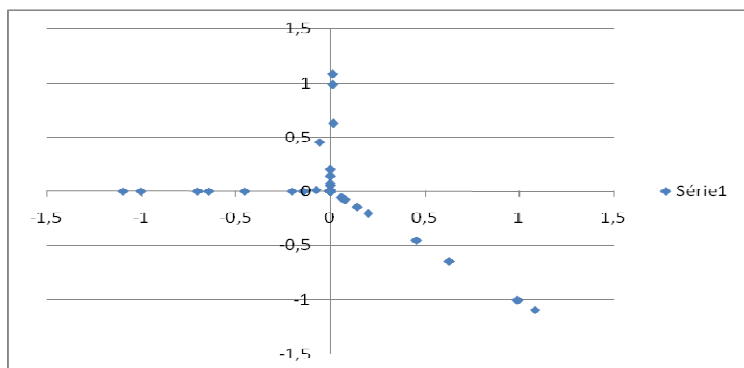
$c = 20$, $r(\max) = 99,97$



$c = 50$, $r(\max) = 260,0$



$c = 100, r(\max) = 530,1$



$c = 200, r(\max) = 1149$

Bei genauerer Betrachtung kann man erkennen, dass die Schleifen, je höher die Potenz wird, immer schmäler und dünner werden. Sie formen eine Art Stern, von dem zwei Strecken je auf dem negativen Teil der x-Achse und dem positiven Teil der y-Achse verlaufen.

Eine kleine Knobelaufgabe

In den Gleichungen (1) bis (6) bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Zahlen.

- (1) $a + 13 = b$
- (2) $b \cdot 2 = c$
- (3) $c : 5 = d$
- (4) $d + 3 = 11$
- (5) $e \cdot e = f$
- (6) $e - a = 2$

Gib Zahlen an, die man für die Buchstaben einsetzen kann, so dass die Gleichungen richtig sind. Welche Gleichung hast du zuerst, welche Gleichung zuletzt gelöst?

Lösung am Ende des Heftes.

Teilbarkeit spezieller Zahlen durch 6

1. Einleitung

Eine natürliche Zahl ist durch 6 teilbar, wenn man die Zahl durch 2 und 3 teilen kann, denn $2 \cdot 3$ ergibt 6. Man kann eine Zahl durch 2 teilen, wenn die letzte Zahl gerade ist. Bei der 3 ist das so, dass wenn die Quersumme durch 3 geteilt werden kann, dann auch die Zahl.

Beispiel 726: Die 6 ist gerade, also ist die 726 durch 2 teilbar. Die Quersumme der Zahl ist 15. 15 kann man durch 3 teilen. Also kann man 726 durch 3 teilen und damit auch durch 6.

Beispiel 285: Die Zahl hat auch die Quersumme 15, ist aber nicht gerade. Also ist sie nicht durch 6 teilbar.

Mit dieser Regel habe ich spezielle Zahlen untersucht. Zuerst habe ich die Teilbarkeit von Zahlen der Form 5b, 5bb, 5bbb usw. durch 6 untersucht. Danach habe ich versucht, dieses Schema auf andere Teiler zu übertragen, wie zum Beispiel auf die 5 und die 12.

Anschließend habe ich die Teilbarkeit durch 6 bei Zahlen der Form 5ab, 5abab, 5ababab usw. untersucht. Zum Schluss habe ich noch Zahlen der Form 5abcabc... und 5abcdabcd... untersucht und habe für die Teilbarkeit dieser Zahlen durch 6 allgemeine Regeln gefunden.

2. Für welche Ziffern b sind die Zahlen 5b, 5bb, 5bbb usw. durch 6 teilbar?

Wir müssen nur gerade Zahlen untersuchen, weil alle ungeraden Zahlen nicht durch 6 teilbar sind.

2.1 Untersuchung von Zahlen der Form 5b

5b	Untersuchung	teilbar?
52	5 plus 2 ergibt 7 und 7 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet: die 52 ist nicht durch 3 und nicht durch 6 teilbar.	Nein
54	5 plus 4 ergibt 9 und 9 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 54 ist durch 6 teilbar.	Ja
56	5 plus 6 ergibt 11 und 11 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 56 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
58	5 plus 8 ergibt 13 und 13 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 58 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein

Ergebnis: Nur eine dieser Zahlen ist durch 6 teilbar und zwar die 54. Bei allen anderen ist die Quersumme nicht durch 3 teilbar.

2.2 Untersuchung von Zahlen der Form 5bb

5bb	Untersuchung	Teilbar
522	5 plus 2 plus 2 ergibt 9 und 9 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 522 ist durch 6 teilbar.	Ja
544	5 plus 4 plus 4 ergibt 13 und 13 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 544 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
566	5 plus 6 plus 6 ergibt 17 und 17 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 566 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
588	5 plus 8 plus 8 ergibt 21 und 21 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 588 ist durch 6 teilbar.	Ja

Hier sind zwei Zahlen durch 6 teilbar: 522 und 588.

2.3 Untersuchung von Zahlen der Form 5bbb

5bbb	Untersuchung	Teilbar
5222	5 plus 2 plus 2 plus 2 ergibt 11 und 11 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5222 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
5444	5 plus 4 plus 4 plus 4 ergibt 17 und 17 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5444 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
5666	5 plus 6 plus 6 plus 6 ergibt 23 und 23 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5666 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
5888	5 plus 8 plus 8 plus 8 ergibt 29 und 29 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5888 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein

Hier ist sogar keine Zahl durch 6 teilbar.

2.4 Untersuchung von Zahlen der Form 5bbbb

5bbbb	Untersuchung	Teilbar
52222	5 plus 2 plus 2 plus 2 plus 2 ergibt 13 und 13 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 52222 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein

54444	5 plus 4 plus 4 plus 4 plus 4 ergibt 21 und 21 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 54444 ist durch 6 teilbar.	Ja
56666	5 plus 6 plus 6 plus 6 plus 6 ergibt 29 und 29 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 56666 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
58888	5 plus 8 plus 8 plus 8 plus 8 ergibt 37 und 37 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 58888 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein

2.5 Wie geht es weiter?

Die Zahlen 54, 54 444 sind durch 6 teilbar. Vermutung: 54 444 444 geht wieder, weil dann zu der Quersumme $21 = 5 + 4 + 4 + 4 + 4$ von 54444 noch mal $4 + 4 + 4$, also 3×4 dazu kommt. Das bedeutet die 54 444 444 ist wieder durch drei und dann auch durch 6 teilbar. Wenn man noch mal 3 Vieren dranhängt, dann ist die Division wieder möglich usw.

Die Zahl 522 ist durch 6 teilbar. **Vermutung:** 522 222 geht wieder, weil dann zu der Quersumme $9 = 5 + 2 + 2$ von 522 noch mal $2 + 2 + 2$, also 3×2 dazu kommt. Das bedeutet die 522 222 ist wieder durch 3 und dann auch durch 6 teilbar. Wenn man noch mal 3 Zweien dranhängt, dann ist die Division wieder möglich usw.

Die Zahl 588 ist durch 6 teilbar. Vermutung: 588 888 geht wieder, weil dann zu der Quersumme $21 = 5 + 8 + 8$ von 588 noch mal $8 + 8 + 8$, also 3×8 dazu kommt. Das bedeutet die 588 888 ist wieder durch 3 und auch durch 6 teilbar. Wenn man noch mal 3 Achten dranhängt, dann ist die Division wieder möglich usw.

3. Kann man die Ergebnisse auf andere Teiler übertragen?

3.1 Teilbarkeit durch 2 und 5

Die 2 haben wir schon bei der Teilbarkeit durch 6 behandelt. Die Zahl 5bbbb ist durch zwei teilbar, wenn eine gerade Ziffer hinten steht. Dies ist genau das gleiche bei 5. Dort muss aber eine 0 oder 5 am Ende sein.

3.2 Teilbarkeit durch 3

Auch das haben wir schon bei der 6 untersucht, weil auch da die Quersumme durch 3 teilbar sein muss.

Bei der 1 müssen am Anfang eine 1 und danach müssen immer 3 Einsen dazu kommen. Weil $5+1=6$; $5+1+1+1=9$ allgemein: $5+1 + n*(1+1+1)$ ist durch 3 teilbar.

Bei der 2 müssen am Anfang 2 Zweien und danach müssen immer 3 Zweien dazu kommen. Weil $5+2+2=9$; $5+2+2+2+2=15$ allgemein: $5+2^2 + n*(2+2+2)$

Bei der 3 geht es nie, da man immer eine 3 zu einer Zahl addiert die nicht durch 3 teilbar ist.

Bei der 4 muss am Anfang eine 4 und danach müssen immer 3 Vieren dazu kommen. Weil $5+4=9$; $5+4+4+4+4=21$ allgemein: $5+4 + n*(4+4+4)$

3.3 Teilbarkeit durch 12

Bei der 1 müssen am Anfang 7 Einsen und danach müssen immer 12 Einsen dazu kommen. Allgemein: $5+7*1+ n*(12*1)$

Bei der 2 geht es nie, da man immer eine gerade Zahl zu einer Zahl addiert, die nicht durch 12 teilbar ist.

Bei der 3 geht es nie, da man immer eine teilbare Zahl zu einer Zahl addiert, die nicht durch 12 teilbar ist.

Bei der 4 geht es nie, da man immer eine teilbare Zahl zu einer Zahl addiert, die nicht durch 12 teilbar ist.

Es geht nicht mehr, weil keine Zahl $+5,12$ ergibt. Außer bei der 7, dort geht es am Anfang, aber am Ende nicht mehr.

4. Für welche Ziffern a und b sind die Zahlen 5ab, 5abab usw. durch 6 teilbar?

51212...	Untersuchung	teilbar
512	5 plus 1 plus 2 ergibt 8 und 8 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 512 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
51212	5 plus 1 plus 2 plus 1 plus 2 ergibt 11 und 11 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 51212 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
5121212	5 plus 1 plus 2 plus 1 plus 2 plus 1 plus 2 ergibt 14 und 14 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5121212 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein

Erklärung: Bei 5121...21212 kommt zur 5 immer 12 dazu, das heißt, immer ein Vielfaches von 3. Deshalb kann 5121...21212 nie durch 3 teilbar sein.

514	5 plus 1 plus 4 ergibt 10 und 10 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 514 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
51414	5 plus 1 plus 4 plus 1 plus 4 ergibt 15 und 15 kann man durch 3 teilen. Das bedeutet die Zahl 51414 ist durch 6 teilbar.	Ja

5141414	Jetzt ergibt die Quersumme 20 und 20 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5141414 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
514141414	Jetzt ergibt die Quersumme 25 und 25 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 514141414 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
51414141414	Wegen Quersumme 30 geht es jetzt wieder.	Ja

Regel: Die Zahl 514 ist durch 6 teilbar. Dann ist sie bei 3 mal 14 hinzufügen wieder durch 6 teilbar usw..

516	5 plus 1 plus 6 ergibt 12 und 12 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet, die 516 ist durch 6 teilbar.	Ja
51616	Jetzt ist die Quersumme $12 + 7 = 19$ nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet, die 51616 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
5161616	19 plus 1 plus 6 ergibt 26 und 26 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet, die 5161616 ist nicht durch 6 teilbar.	Nein
516161616	26 plus 1 plus 6 ergibt 33 und 33 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet, die 516161616 ist durch 6 teilbar	Ja

518 und 51818 haben die Quersummen 14 und 23. Das bedeutet, sie sind nicht durch 6 teilbar. Weil immer plus 9 gerechnet wird, sind die Zahlen 5181818... nie durch 6 teilbar. Genauso wie 52424..., 53030..., 53636... usw.

52020 ist durch 6 teilbar und dann wieder 52020202020 usw.

522 ist durch 6 teilbar und dann wieder 522222222 usw.

5. Für welche Ziffern a, b und c sind die Zahlen 5abc, 5abcabc usw. durch 6 teilbar?

Ergebnis: Genau wie bisher, braucht man alle Zahlen, bei denen die letzte Ziffer ungerade ist, nicht zu untersuchen, weil sie nicht durch 2 teilbar sind.

Beispiel: abc = 132

5132	$5 + 1 + 3 + 2$ ergibt 11 und ist nicht durch 3 teilbar, also nicht durch 6 teilbar	Nein
5132132	$5 + 1 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2$ ergibt 17 und ist nicht durch 3 teilbar, also nicht durch 6 teilbar	Nein

Allgemein: 5132132... wird nie durch 6 teilbar sein, weil es immer eine durch 6 teilbare Zahl zu einer nicht durch 6 teilbaren Zahl hinzugefügt wird.

Ergebnis: Das zeigt, dass man auch Dreierkombinationen mit Quersumme 3 und gerader Endziffer nicht zu untersuchen braucht.

5124 Startzahl	$5 + 1 + 2 + 4$ ergibt 12 und ist durch 3 teilbar, also durch 6 teilbar	Ja
5124124	$5 + 1 + 2 + 4 + 1 + 2 + 4$ ergibt 19 und ist nicht durch 3 teilbar, also nicht durch 6 teilbar	Nein
5124124124	$5 + 1 + 2 + 4 + 1 + 2 + 4 + 1 + 2 + 4$ ergibt 26 und ist nicht durch 3 teilbar, also nicht durch 6 teilbar	Nein
5124124124124	$26 + 7$ ergibt 33 und ist durch 3 teilbar, also durch 6 teilbar	Ja
5124124124124124	$33 + 7$ ergibt 40 und ist nicht durch 3 teilbar, also nicht durch 6 teilbar	Nein

5128	$5 + 1 + 2 + 8$ ergibt 16 und ist nicht durch 3 teilbar, also nicht durch 6 teilbar	Nein
5128128 Startzahl	$5 + 1 + 2 + 8 + 1 + 2 + 8$ ergibt 27 und ist durch 3 teilbar, also durch 6 teilbar	Ja
5128128128	$5 + 1 + 2 + 8 + 1 + 2 + 8 + 1 + 2 + 8$ ergibt 38 und ist nicht durch 3 teilbar, also nicht durch 6 teilbar	Nein
5128128128128	$38 + 11$ ergibt 49 und ist nicht durch 3 teilbar, also nicht durch 6 teilbar	Nein
5128128128182128	$49 + 11$ ergibt 60 und ist durch 3 teilbar, also durch 6 teilbar	Ja

In den beiden Beispielen ist die Zahl bei jedem **dritten** Anhängen der Kombination durch 6 teilbar (genau wie bei 5ababab...).

Das liegt daran, dass man bei Division von $a+b+c$ durch 3 den Rest 1 oder 2 erhält. Bei Rest 1 geht es schon mit der Startzahl.

Kombinationen mit Rest 1 sind: 112, 118, 124, 130, ..., 586, 592,, 988, 994

Ergebnis: Damit die Startzahl schon am Anfang durch 6 teilbar ist, muss man zur Kombination 112 immer plus 6 rechnen. Die größte dreistellige Kombination ist 994, d.h. 5994 ist als Startzahl direkt durch 6 teilbar.

Rest 2: 116, 122, 128, 134,, 548, 554,, 992, 998

Ergebnis: Damit die Startzahl beim Zweiten dranhängen durch 6 teilbar ist, muss man zur Kombination 116 immer plus 6 rechnen. Die größte dreistellige Kombination ist 998.

Rest 0 (d.h. 5abcbabc... ist nicht durch 6 teilbar):

114, 120, 126, 132,, 588, 594,, 990, 996

6. Für welche Ziffern a, b, c und d sind die Zahlen 5abcd, 5abcdabcd usw. durch 6 teilbar?

Beispiel: abcd = 1234

51234	5+1+2+3+4 ergibt 15 und ist durch 3 teilbar, also auch durch 6 teilbar	Ja
512341234	5+10+10 ergibt 25 und ist nicht durch 3 teilbar, also auch nicht durch 6 teilbar	Nein
5123412341234	5+10+10+10 ergibt 35 und ist nicht durch 3 teilbar, also auch nicht durch 6 teilbar	Nein
51234123412341234	5+10+10+10+10 ergibt 45 und ist durch 3 teilbar, also auch durch 6 teilbar	Ja
512341234123412341234	5+10+10+10+10+10 ergibt 55 und ist nicht durch 3 teilbar, also auch nicht durch 6 teilbar	Nein

Beispiel: abcd = 1236 (Geht nicht, da wenn man eine durch 3 teilbare Zahl zu einer nicht durch 3 teilbare Zahl addiert, kommt nie eine durch 3 teilbare Zahl heraus.)

Beispiel: abcd = 1238

51238	5+1+2+3+8 ergibt 19 und ist nicht durch 3 teilbar, also auch nicht durch 6 teilbar	Nein
512381238	5+14+14 ergibt 33 und ist nicht durch 3 teilbar, also auch nicht durch 6 teilbar	Ja
5123812381238	5+14+14+14 ergibt 47 und ist nicht durch 3 teilbar, also auch nicht durch 6 teilbar	Nein
51238123812381238	5+14+14+14+14 ergibt 61 und ist nicht durch 3 teilbar, also auch nicht durch 6 teilbar	Nein
512381238123812381238	5+14+14+14+14+14 ergibt 75 und ist durch 3 teilbar, also auch durch 6 teilbar	Ja

In den beiden Beispielen ist die Zahl bei jedem **dritten** Anhängen der Kombination durch 6 teilbar (genau wie bei 5ababab...).

Das liegt daran, dass man bei Division von $a+b+c+d$ durch 3 den Rest 1 oder 2 erhält. Bei Rest 1 geht es schon mit der Startzahl.

Kombinationen mit Rest 1 sind: 1234, 1300, 1306,... ,9988, 9994

Ergebnis: Damit die Startzahl schon am Anfang durch 6 teilbar ist, muss man zur Kombination 1234 immer plus 6 rechnen. Die größte vierstellige Kombination ist 9994 , d.h. 59994 ist als Startzahl direkt durch 6 teilbar.

Rest 2: 1238, 1244,, 9992, 9998

Ergebnis: Damit die Startzahl beim Zweiten dranhängen durch 6 teilbar ist, muss man zur Kombination 1238 immer plus 6 rechnen. Die größte vierstellige Kombination ist 9998.

Rest 0: (d.h. 5abcdabcd... ist nicht durch 6 teilbar):

1236, 1242,, 9990, 9996

Fünfstellige Zahlen mit Bedingungen

1. Das Startbeispiel

Es sind alle fünfstellige natürlichen Zahlen zu ermitteln, für die folgende Eigenschaften zutreffen:

- (1) Die erste Ziffer ist größer als die letzte.
- (2) Die zweite Ziffer ist zweimal so groß wie die erste.
- (3) Die dritte Ziffer ist um 4 kleiner als die zweite.
- (4) Die vierte Ziffer ist um 3 größer als die zweite.

Wir haben uns gefragt, was ist die kleinste natürliche Zahl, die an erster Stelle der gesuchten Zahl stehen kann.

Die kleinste Zahl, die als erste Ziffer auftreten kann, ist eigentlich die 1, weil die Zahl ja nicht mit 0 anfangen kann. Die 1 kann aber nicht gehen, weil die zweite Ziffer dann 2 wäre und die 3. Ziffer dann um 4 kleiner sein müsste als 2 und das geht nicht. Deshalb muss die erste Ziffer mindestens eine 2 sein. Die Zahlen 24071 und 24070 erfüllen alle Regeln.

Hier sind alle anderen Zahlen die, die diesen Regeln entsprechen:

36290, 36291, 35182, 48450, 48451, 48452, 48453,

Das sind alle Zahlen weil in der Regel 2 die zweite Ziffer 2-mal so groß sein muss wie die erste. Dann sind die zweite, dritte und vierte Ziffer fest. Nur für die letzte hat man wegen der Regel 1 mehrere Möglichkeiten.

Mit der 5 kann man nicht beginnen, denn dann wird die zweite Ziffer verdoppelt auf 10 und dann ist die Zahl nicht mehr 5stellig. Das Gleiche gilt für die Anfangsziffern 6,7,8 und 9.

2. Wir denken uns andere Regeln aus

Beispiel 1:

- (1) Die erste Ziffer ist kleiner als die letzte.
- (2) Die 3. Ziffer ist um drei größer als die letzte.
- (3) Die 2. Ziffer ist um 4 kleiner als die 3.
- (4) Die 4. Ziffer ist doppelt so groß wie die 2.

Die erste Zahl kann die eins sein wie in den folgenden Beispielen:

11522, 12643, 13764 und 14885.

Erklärung warum das alle Zahlen mit einer 1 vorne sind: Die letzte Ziffer kann jetzt nicht mehr größer werden, weil in der 4. Regel steht, dass die 4. Zahl doppelt so groß ist wie die 2.

Zahl. Wenn die letzte Ziffer also eine 6 wäre, dann wäre die 3. Ziffer eine 9, die 2. Ziffer wäre eine 5 und die 4. Ziffer eine 10 und das geht nicht.

Hier sind die restlichen Zahlen, die diese Regel erfüllen:

22643, 23764, 24885, 33764, 34885, 44885

Weil die letzte Zahl nicht größer als 5 sein kann, kann die erste Zahl höchstens 4 sein und damit gibt es nicht mehr Zahlen mit diesen Regeln.

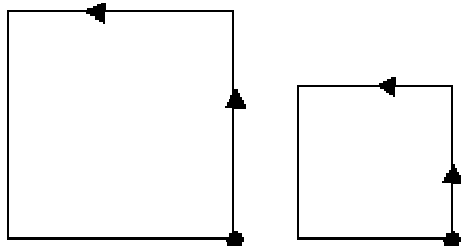
Die Idee stammt von folgender Seite:

https://www.mathe-mv.de/fileadmin/uni-rostock/Alle_MNF/Mathe-MV/Publikationen/Sekundarstufe_I/Monatsaufgaben_Serie_1.doc

Ein dummer Roboter

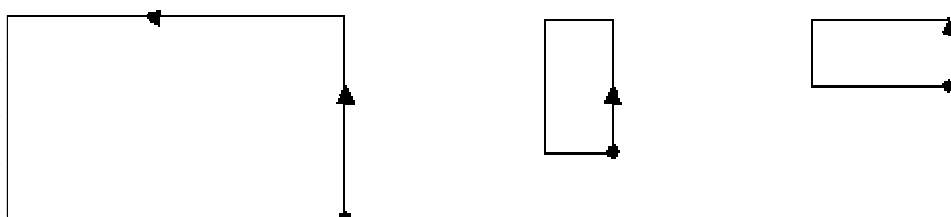
1. Was wir schon wussten

Im MadMax 41 haben wir einen dummen Roboter vorgestellt. Er konnte nur gerade aus laufen und um 90° nach links abbiegen. Zuerst konnte er sich nur eine Zahl merken. Deshalb lief er nur im Quadrat rum:

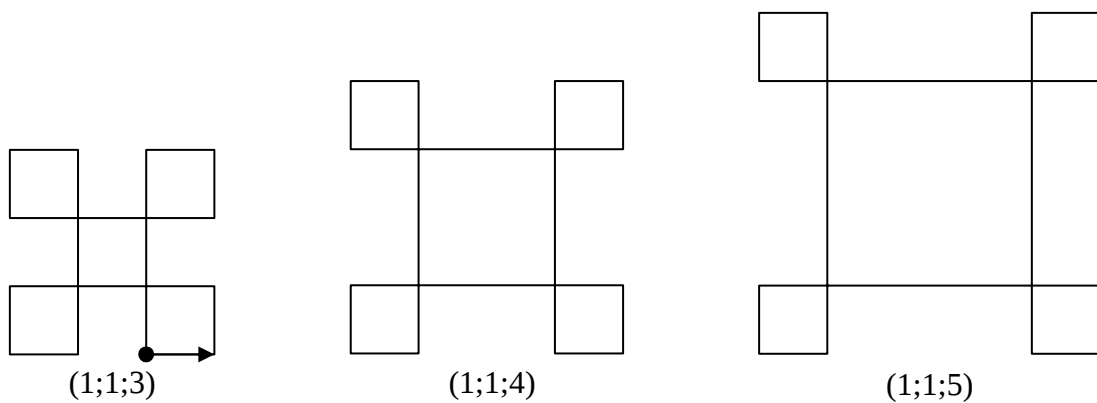


Im ersten Beispiel läuft er immer 3 cm gerade aus, ehe er sich um 90° dreht und dann wieder 3 cm läuft usw., bis er wieder am Startpunkt ankommt. Im zweiten Beispiel läuft er immer 2 cm, ehe er die Richtung ändert.

Wenn er sich zwei Zahlen merken konnte, kam immer ein Rechteck raus, weil er z.B. bei (3;5) zuerst 3 Schritte gerade aus läuft, dann 5 Schritte links läuft, dann wieder 3 nach links und 5 nach links und dann ist er wieder am Startpunkt angekommen.

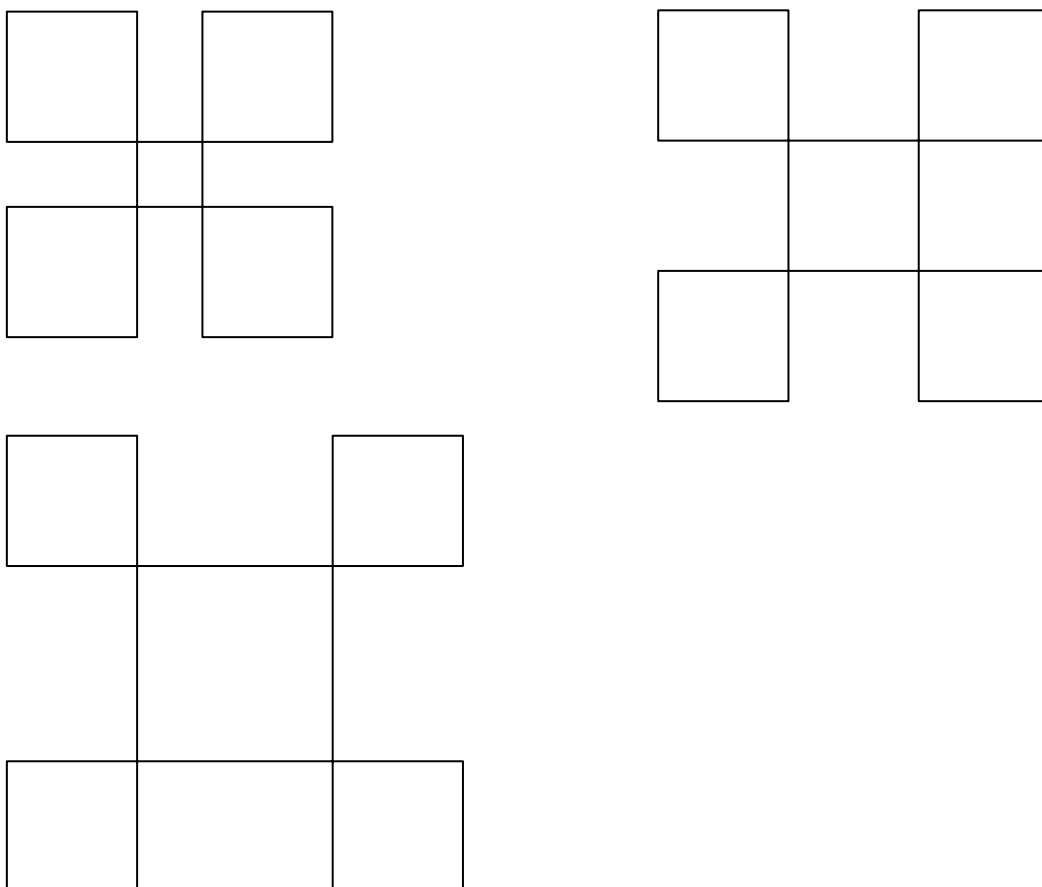


Spannend wird es erst, wenn er sich drei Zahlen merken kann:



Hier heißt z.B. (1;1;4), dass der Roboter zuerst 1 Schritt geradeaus geht, dann 1 Schritt nach links und dann 4 Schritte nach links und dann wieder neu 1 Schritt nach links usw.. Das Ergebnis sieht aus wie eine Windmühle.

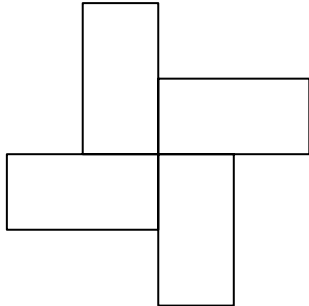
Auch wenn man andere Startzahlen wählt (z.B.: 225, 226 und 227), sieht man, dass es wieder Windmühlenflügel sind:



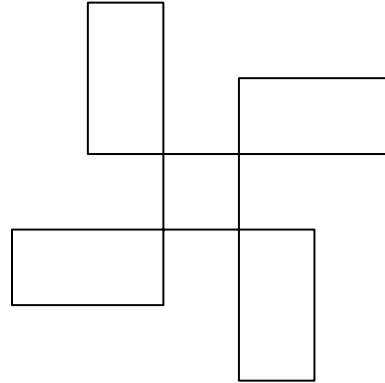
2. Was passiert bei (1;2;3), (1;2;4), ... ?

In diesem Heft untersuchen wir, was passiert, wenn der Roboter am Anfang nicht zwei gleich große Schritte macht:

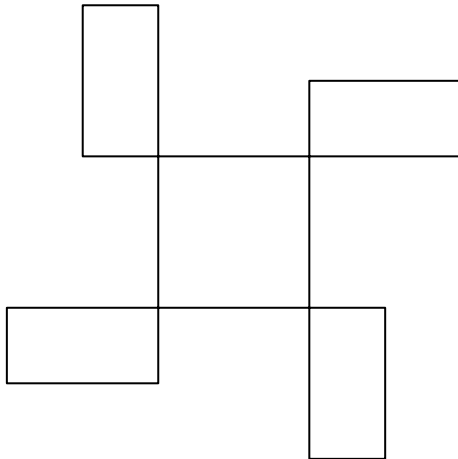
123



124



125



Jetzt entstehen keine Quadrate mehr in den vier Ecken, sondern man sieht 1 mal 2 große Rechtecke. Das legen die Zahlen 1 und 2 so fest. Die letzte Zahl entscheidet über die Größe des Quadrates in der Mitte: z.B. wenn die Reihenfolge 126 ist, dann ist das Quadrat in der Mitte $6 - 2 - 1 = 3$ groß. Bei (1;2;17) wäre es 14 groß.

Wenn die zweite Zahl größer wird, dann werden auch die Flügel länger:

Bei (1;3;9) ist das Quadrat 5 Kästchen groß, weil $9 - 3 - 1 = 5$ ist. Die Windmühlenflügel sind jetzt aber 1 hoch und 3 lang.

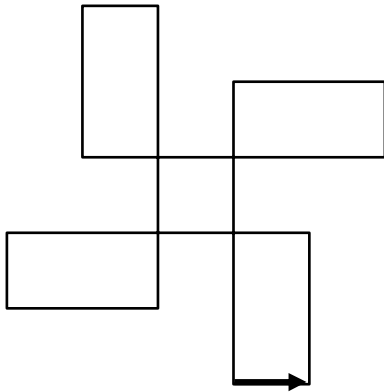
Bei (1;4;17) ist die Mitte 12 Kästchen groß, weil $17 - 4 - 1 = 12$. Die Windmühlenflügel sind 1 hoch und 4 lang.

Bei (3;7;29) sind 19 Kästchen in der Mitte, weil $29 - 3 - 7 = 19$ ist. Die Windmühlenflügel sind 3 hoch und 7 lang.

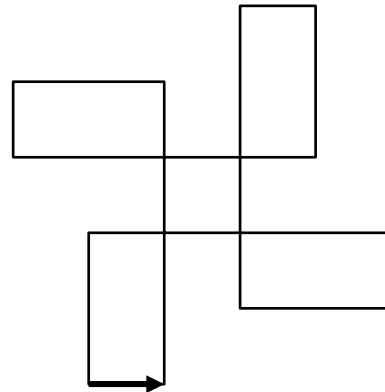
3. Was passiert, wenn man die Zahlen vertauscht?

Wir haben jetzt untersucht, was passiert, wenn man die Zahlen vertauscht: 124, 142, 214, 241, 412 und 421.

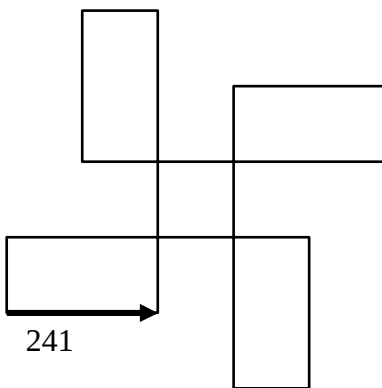
124



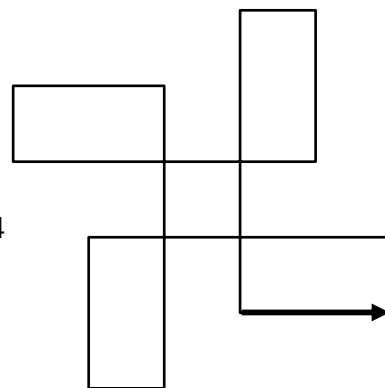
142



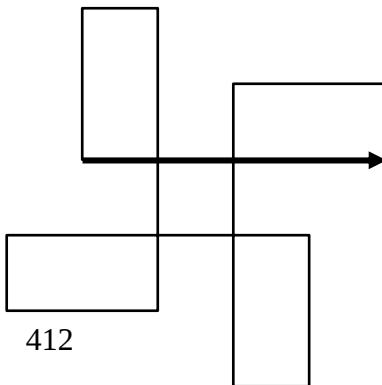
241



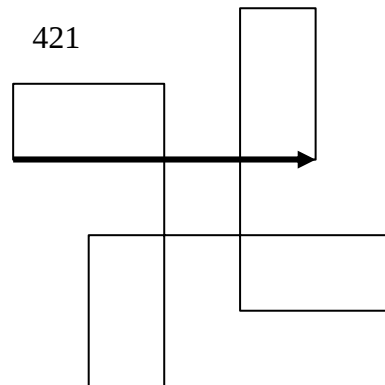
214



412



421

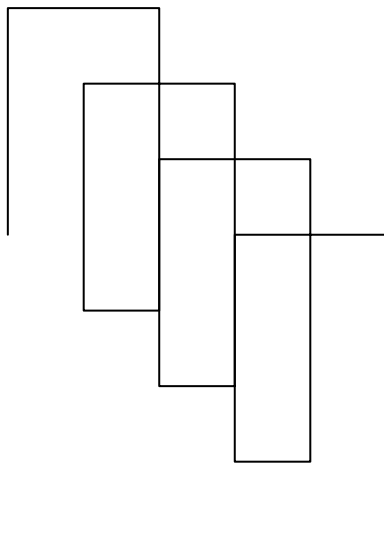
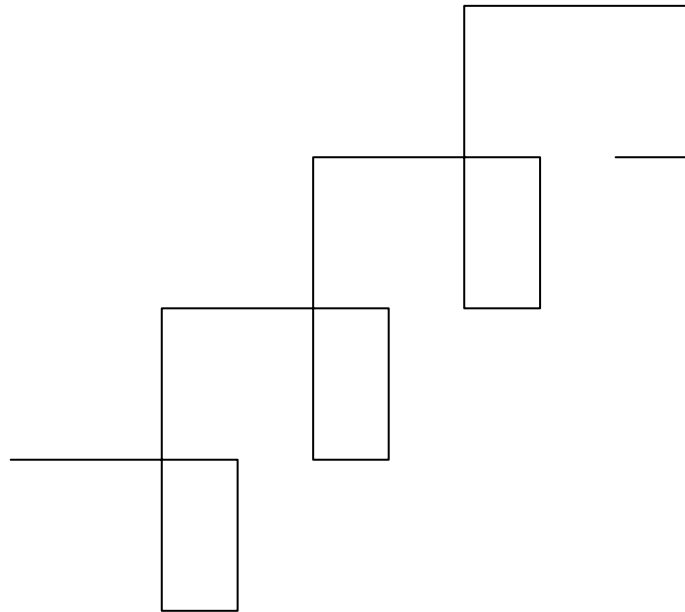


Die Reihenfolge ist nicht egal, denn es kommt nicht immer die selbe Windmühle raus, sondern eine, die spiegelverkehrt ist. Das passiert dann, wenn man die letzten beiden Zahlen vertauscht.

4. Jetzt kann sich der Roboter 4 Zahlen merken

Erstes Beispiel: (1;2;3;4)

Wenn sich der dumme Roboter 1234 merken kann, dann läuft er nach unten links und kommt nicht mehr zurück! Hier gibt es also keine Windmühle.



Auch bei 1423 gibt es keine Windmühle. Diesmal geht er langsam nach links oben aber nach einer Runde überschneidet er seinen Weg.

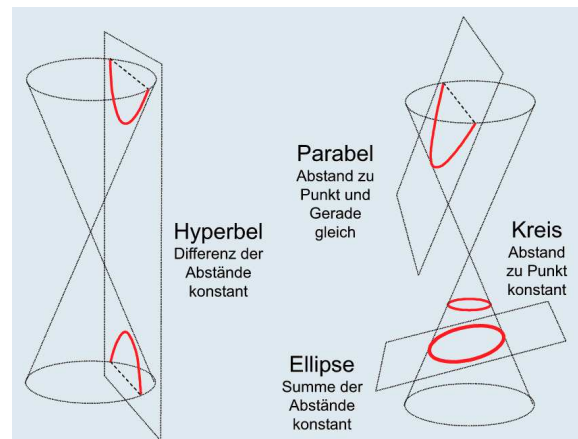
Brennpunktspiegelungen an einer Parabel

1 Definition der Brennpunkt-Spiegelung

1.1 Was ist eine Brennpunktspiegelung?

Im Mathematikunterricht lernt man, wie ein Punkt P an einer Geraden gespiegelt wird. Den gespiegelten Punkt nennt man P' . Dabei wird eine Gerade auf eine Gerade, ein Kreis auf einen Kreis, ein Dreieck auf ein Dreieck usw. abgebildet. In der Mathe-AG haben wir dann überlegt: Kann man auch an Kurven spiegeln? Und was passiert dann mit Geraden und Kreisen?

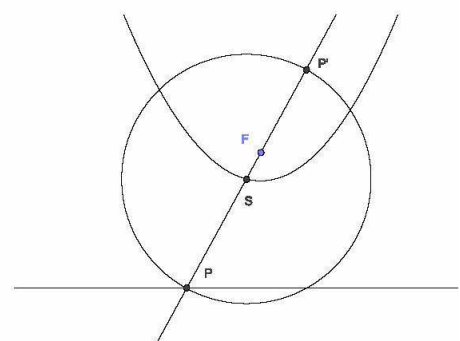
Bei einer sogenannten Brennpunktspiegelung werden Punkte an Parabeln gespiegelt. Dabei benutzt man den Brennpunkt der Parabel. Das habe ich mit dem GeoGebra Classic Programm Version 5.0.512.0-d untersucht. Eine Parabel ist der Graph einer quadratischen Funktion und ein Kegelschnitt.¹ So sieht der Kegelschnitt aus (siehe Bild rechts²):



1.2 Wie führt man eine Brennpunktspiegelung durch?

Wenn man einen Punkt an einer Gerade spiegeln will, so muss man eine senkrechte Gerade zu der Spiegelachse zeichnen, die durch den zu spiegelnden Punkt verläuft. Nun muss man noch einen Kreis zeichnen, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt von der Spiegelachse und der Senkrechten ist und der durch den zu spiegelnden Punkt verläuft. Der Punkt, wo sich der Kreis auf der anderen Seite der Spiegelachse mit der Geraden trifft, ist der gespiegelte Punkt.

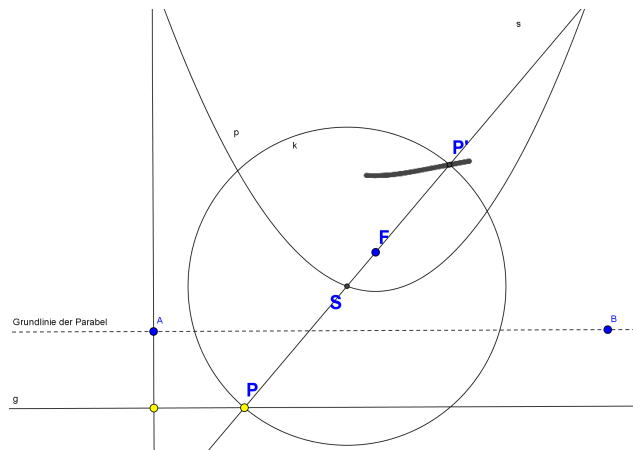
Bei einer Brennpunktspiegelung zeichnet man eine Gerade, die durch den zu spiegelnden Punkt P und den Brennpunkt F einer Parabel verläuft. Nun



zeichnet man noch einen Kreis mit dem Mittelpunkt S als dem Punkt, wo sich die Gerade und die Parabel schneiden und der durch den zu spiegelnden Punkt P verläuft. Der gespiegelte Punkt P' befindet sich dort, wo sich der Kreis und die Gerade die durch den Brennpunkt verläuft schneiden (siehe Zeichnung rechts).

2. Ein erstes Beispiel und wie mit GeoGebra gearbeitet wird

Wenn man in GeoGebra mit dem Pfeil-Werkzeug einen Punkt anklickt (z.B. den Punkt P') und dann die rechte Maustaste drückt, dann erscheint ein Menü für diesen Punkt. In diesem Menü kann man die Funktion „Spur ein“ auswählen. Das Gleiche geht auch über das Eigenschaften-Fenster. Dort heißt es „Spur anzeigen“. Mit der



Spur-Funktion zeichnet GeoGebra die Bewegungen eines Punktes auf. Für die Brennpunktspiegelung ist das sehr hilfreich, weil ich so den Punkt P verschieben und GeoGebra dann alle gespiegelten Punkte festhält. Die dicke schwarze Linie in der Zeichnung rechts wurde durch die Spur-Funktion erstellt, als ich den Punkt P bewegt habe.

3 Systematische Untersuchung von Geraden

3.1 Vorgehensweise

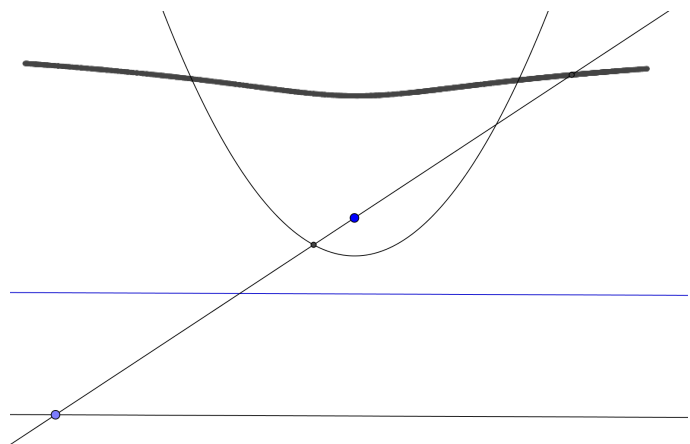
Wenn man mit GeoGebra eine Parabel zeichnen möchte wie im Bild oben, dann muss man eine Grundlinie (das ist die gestrichelte Linie) und einen Brennpunkt (F) für die Parabel zeichnen. Die Grundlinie wird in der Mathematik auch Leitlinie genannt. Für die Grundlinie braucht man zwei Punkte (A und B). Ich habe den Punkt (P), der gespiegelt wird, dann auf einer Geraden (g) laufen lassen, die parallel zur Grundlinie läuft. Die Gerade g habe ich dann noch so verschoben, dass sie unter der Grundlinie lief.

Bei meinem Experiment möchte ich die Gerade g:

- zuerst von unten näher an die Grundlinie heranschieben
- dann auf die Grundlinie legen
- sie danach über die Grundlinie schieben
- weiterschieben, so dass sie die Parabel schneidet
- sie dann zum Brennpunkt hinbewegen
- um sie dann auf den Brennpunkt zu legen
- und zum Schluss möchte ich sie über den Brennpunkt schieben

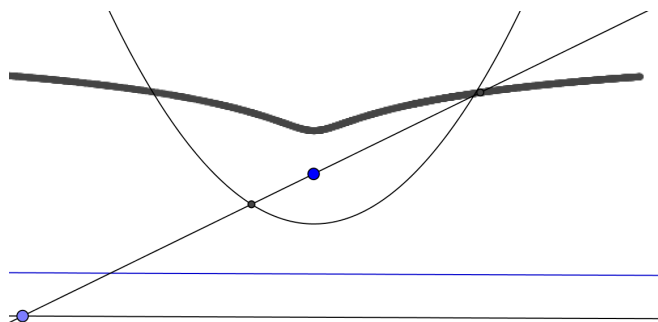
3.2 Bilder von Geraden parallel zur Grundlinie

Je weiter die Gerade unter die blaue Grundlinie geschoben wird, desto gerader ist die Kurve (Spur), die Punkt P' zeichnet, wenn man den Punkt P auf der Geraden von links nach rechts verschiebt. Siehe Bild rechts.



Wichtig: Den Kreis habe ich häufig ausgeblendet weil er nur zum Zeichnen der Spur notwendig sind. Die Grundlinie habe ich häufig ausgeblendet, weil sie nur zur Konstruktion der Parabel notwendig war.

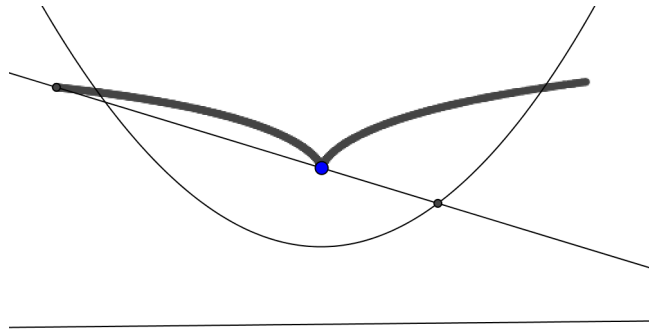
Wenn man die Gerade nach unten verschiebt, dann wird die Spur von Punkt P' immer weniger zu einer Kurve (da wo der Brennpunkt ist) und immer mehr zu einer Geraden. Sie wird dann fast ganz waagrecht.



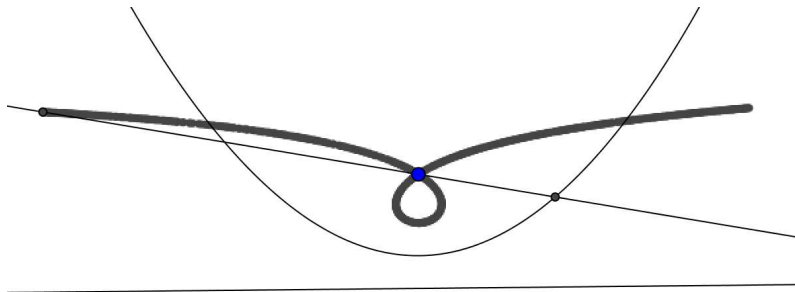
Je näher die Gerade an die blaue Grundlinie geschoben wird, desto stärker wird die Bildkurve dort gekrümmt, wo der Brennpunkt der Parabel ist. Die Kurve der Spur wird nach rechts und links immer flacher (siehe Zeichnung rechts) und wird

irgendwann fast waagrecht. Man muss dafür aber sehr weit in GeoGebra

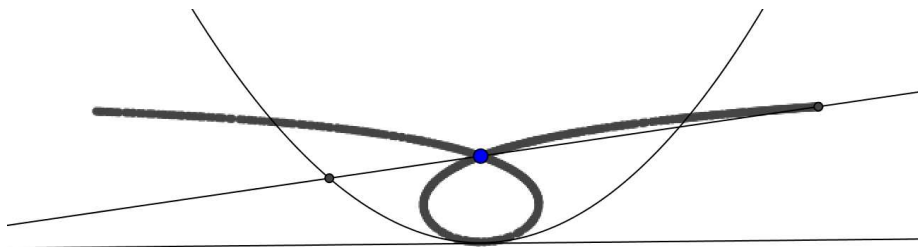
hineinzoomen. Das geht auf einem großen Computermonitor besser, als es sich hier auf dem Papier darstellen lässt.



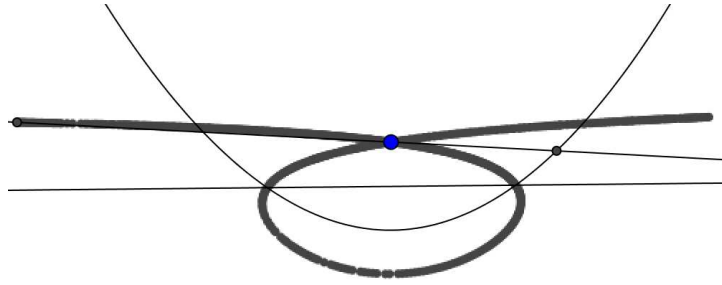
Wenn die Gerade g auf der Grundlinie der Parabel liegt, dann wird die Krümmung zu einer spitzen Ecke im Brennpunkt der Parabel. Siehe Zeichnung oben.



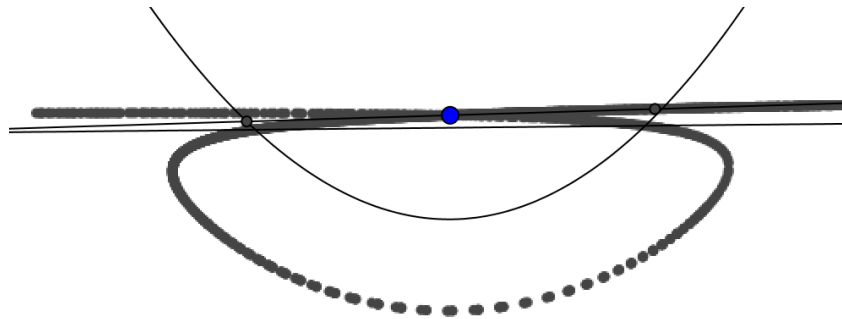
Sobald die Gerade über der Grundlinie liegt, kommt eine Schleife heraus. Siehe Zeichnung oben. Dass passiert, weil sich P' durch den Brennpunkt F nach unten unter den Brennpunkt bewegt. In dem Fall davor, wo die Gerade g auf der Grundlinie liegt, liegt P' nur einmal kurz genau auf dem Brennpunkt, sonst ist er immer über dem Brennpunkt.



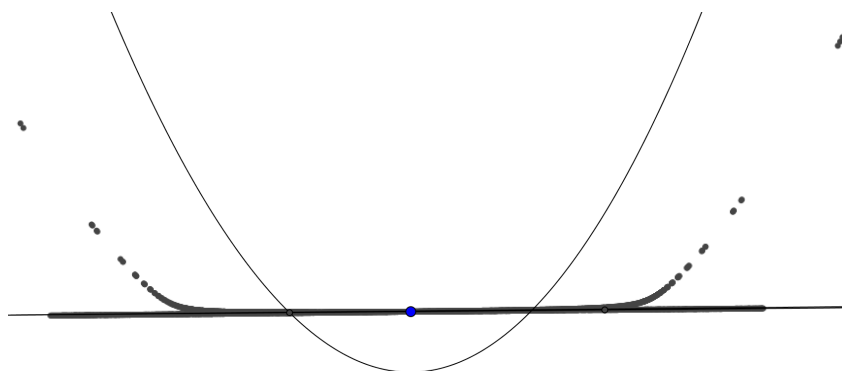
Je höher die Gerade g über der Grundlinie liegt, desto größer wird die Schleifenspur. Wenn die Gerade die Parabel berührt, dann berührt auch die Schleife die Gerade. Siehe Zeichnung oben.



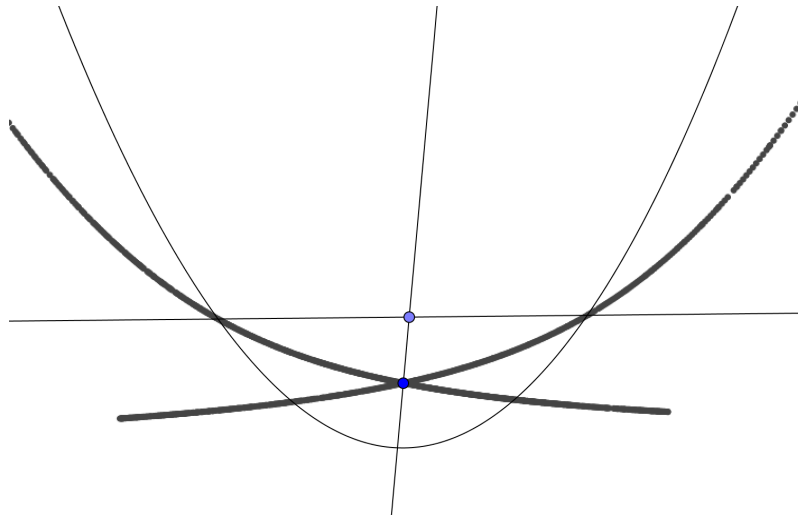
Wenn die Gerade g die Parabel schneidet, dann schneidet auch die Schleifenspur die Parabel und die Gerade in den zwei gleichen Schnittpunkten. Siehe Zeichnung oben.



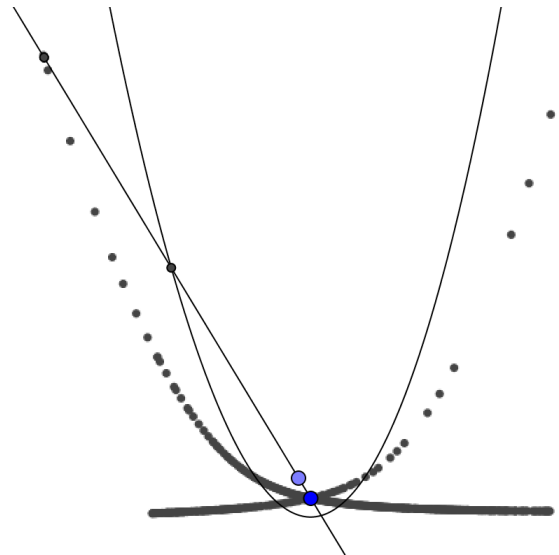
In der Zeichnung oben liegt die Gerade nur noch etwas unter dem Brennpunkt der Parabel.



In der Zeichnung oben liegt die Gerade genau auf dem Brennpunkt der Parabel und dadurch kommt diese Form heraus.

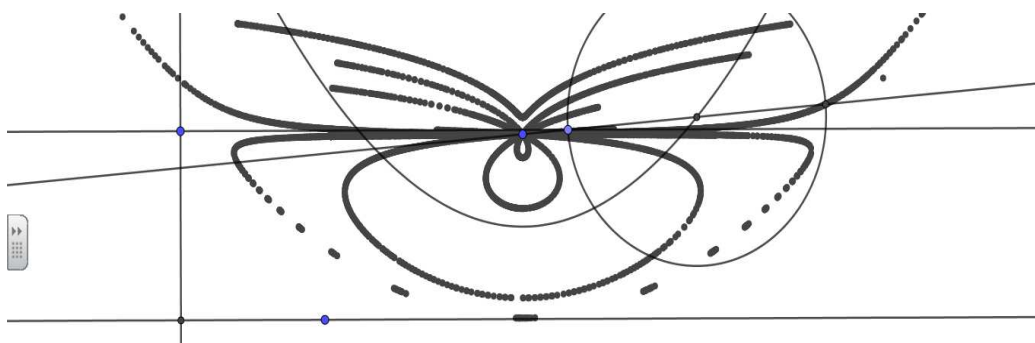


Wenn die Gerade g über dem Brennpunkt der Parabel liegt, dann kommt diese Form heraus. Siehe Zeichnung oben. Es sind zwei getrennte Spuren, die sich im Brennpunkt F schneiden. Die eine Seite jeder Spur verläuft so, dass sie sich der Grundlinie immer weiter annähert, bis sie fast deckungsgleich mit der Grundlinie ist. Die andere Seite der Spur folgt der Parabel. Auch das lässt sich auf meinem großen Computermonitor besser sehen, als hier auf dem Papier.



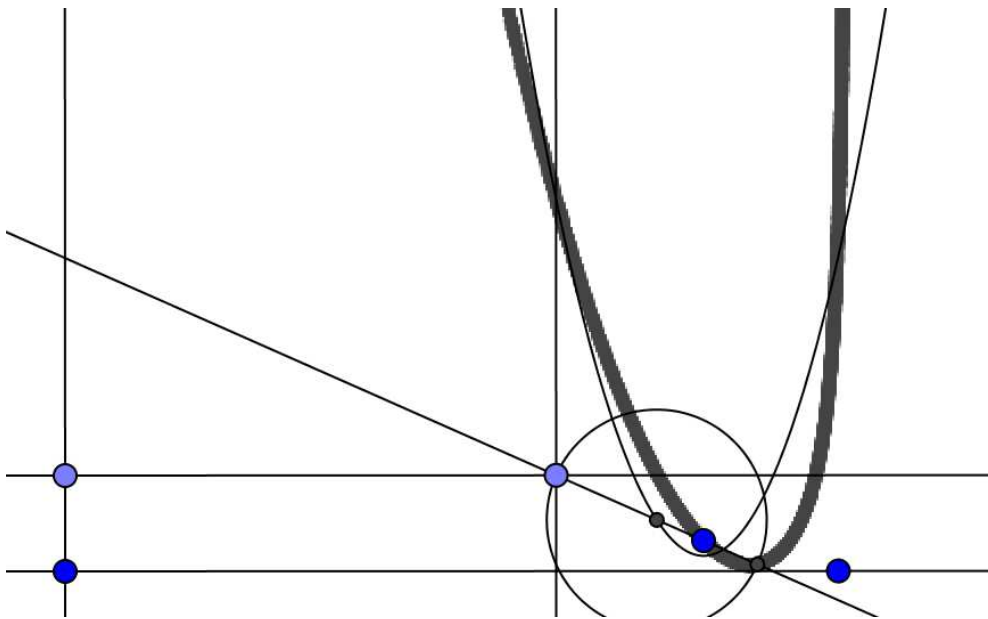
Zusammenfassung der Spiegelung von Geraden in einer Zeichnung:

Wenn man alle Zeichnungen zu einer zusammenfasst (siehe unten), dann ergibt dass eine Art Spinne. Das Bild hat mir so gut gefallen, dass ich es als Titelbild für meine Jufo-Arbeit verwendet habe.



3.3 Bilder von Geraden senkrecht zur Grundlinie

Bei einer senkrechten Grundlinie passiert nichts Besonderes, denn die Bildkurve geht nur runter und wieder rauf. Es entsteht eine Art gekippte Parabel die nicht mehr symmetrisch ist und es entstehen keine Schleifen. In der Zeichnung unten sieht man ein Beispiel :



4 Systematische Untersuchung von Kreisen

4.1 Vorgehensweise

Meine Vorgehensweise bei Kreisen ist, dass der Kreis:

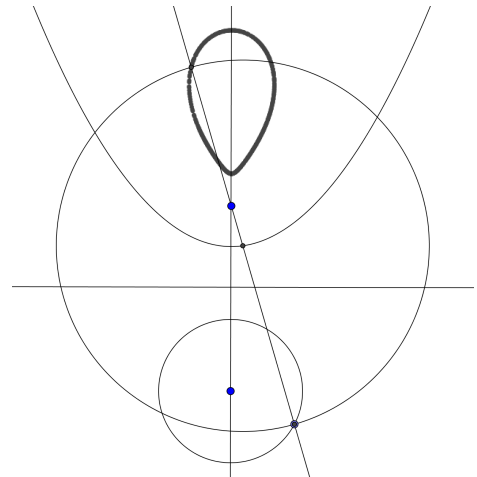
- zuerst unter der Grundlinie gezeichnet wird, damit ich ihn dann langsam nach oben verschieben kann
- dann soll er die Grundlinie berühren
- er soll die Grundlinie dann schneiden aber noch unter der Parabel sein
- danach soll er die Parabel berühren
- er wird dann so verschoben, dass er die Parabel unter dem Brennpunkt schneidet
- dann soll er durch den Brennpunkt verlaufen
- der Kreis soll dann etwas über dem Brennpunkt verlaufen

- dann soll der Mittelpunkt des Kreises genau auf dem Brennpunkt sein
- als nächstes soll der untere Rand des Kreises den Brennpunkt schneiden
- zum Schluss soll der Kreis komplett über der Parabel sein

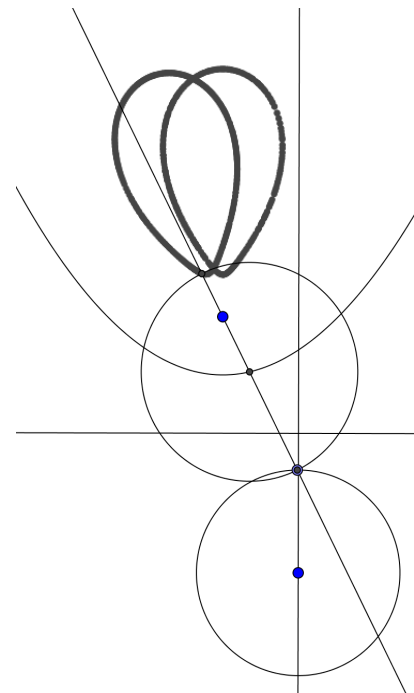
4.2 Bilder von Kreisen

Wenn man einen Kreis an einer Parabel spiegelt, dann kommen natürlich auch keine Kreise raus. Ich war aber gespannt, wie die Spiegelungen diesmal aussehen werden. Dazu habe ich die Gerade g entfernt und einen Kreis mit einem festen Radius hinzugefügt. Den Mittelpunkt des Kreises habe ich senkrecht unter den Brennpunkt gelegt.

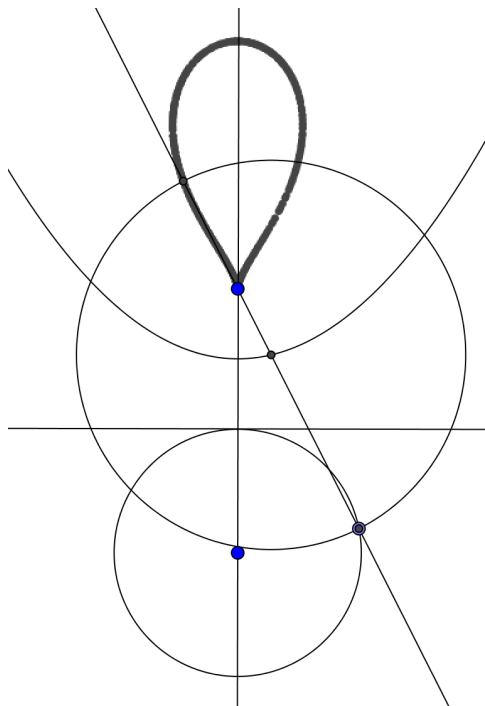
Wenn der Kreis ganz unter der Grundlinie der Parabel verläuft, dann ergibt das eine Form, die wie ein spitzes Ei aussieht. Es ist über dem Brennpunkt der Parabel. Siehe Bild rechts.



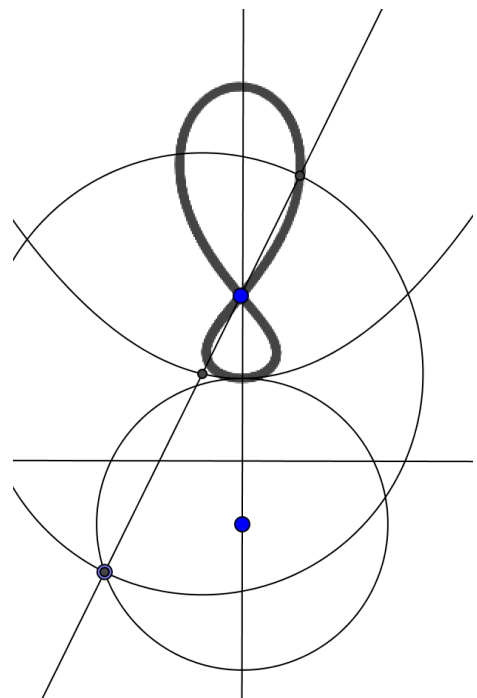
Wenn der Mittelpunkt des Kreises nicht senkrecht unter dem Brennpunkt der Parabel liegt, dann kippt die Spur die der Punkt P' zeichnet entweder nach links oder nach rechts. In der Zeichnung rechts wurde der Kreis nach rechts verschoben. Das Bild der Spur dreht sich dann nach links.



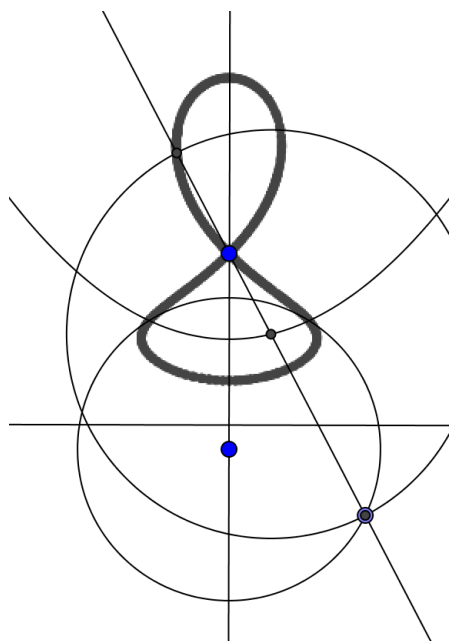
Wenn der Kreis unter der Grundlinie ist und sie berührt, dann berührt auch die Spitze der Spurenfigur den Brennpunkt der Parabel. Siehe Zeichnung links.



Wenn der Kreis über die Grundlinie der Parabel geschoben wird, dann verändert sich die Spurenfigur. Sie bekommt eine Schleife oder eine zweite, kleinere Figur die unterhalb der ersten Figur ist und gedreht ist. Die Schleife schneidet sich im Brennpunkt der Parabel. Wenn man den Kreis weiter nach oben schiebt und er dann die Parabel

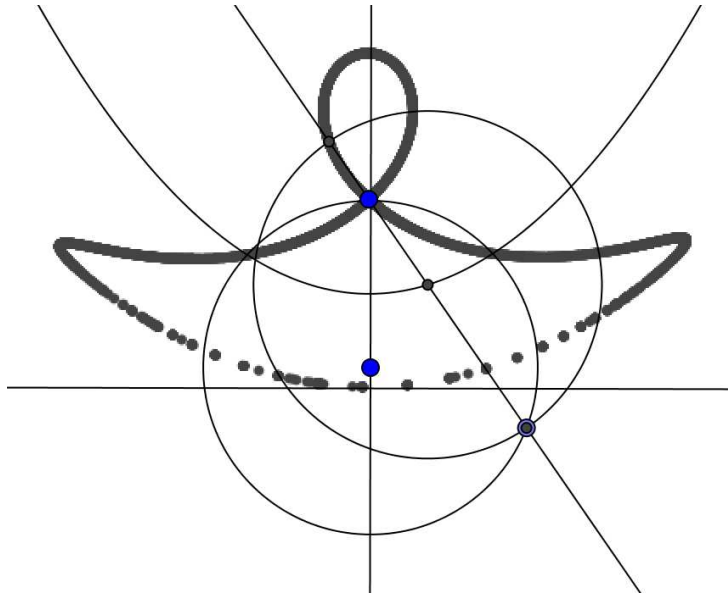


berührt, dann berührt auch der untere Teil der Schleifenfigur die Parabel und den Kreis.

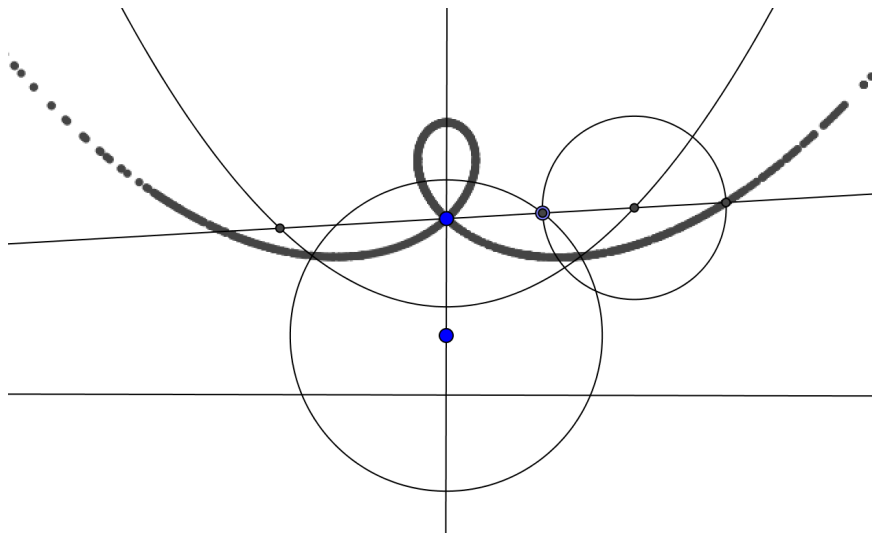


Wenn der Kreis die Parabel unterhalb des Brennpunkts der Parabel schneidet, dann sind die beiden Schnittpunkte der Spurenfigur, des Kreises und der Parabel die gleichen. Außerdem dehnt sich der untere Teil der Schleife nach rechts und links aus. Siehe Zeichnung links.

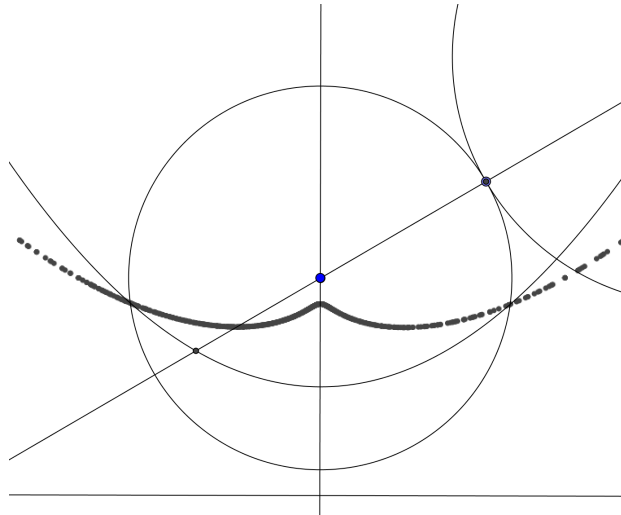
Wenn der Kreis den Brennpunkt schneidet, dann sind die Schnittpunkte noch immer Deckungsgleich. Der untere Teil der Spurenfigur wird aber sehr breit und sieht wie ein liegender Halbmond aus:



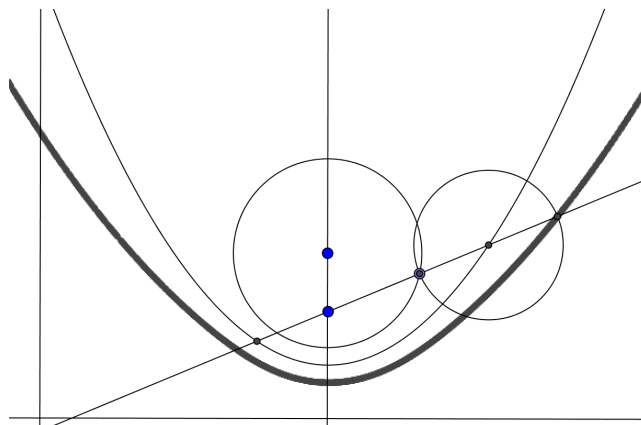
Wenn der Kreis über den Brennpunkt geschoben wird, dann löst sich die untere Figur auf und es entsteht die folgende Zeichnung. Der Mittelpunkt des Kreises ist noch immer unter der Parabel.



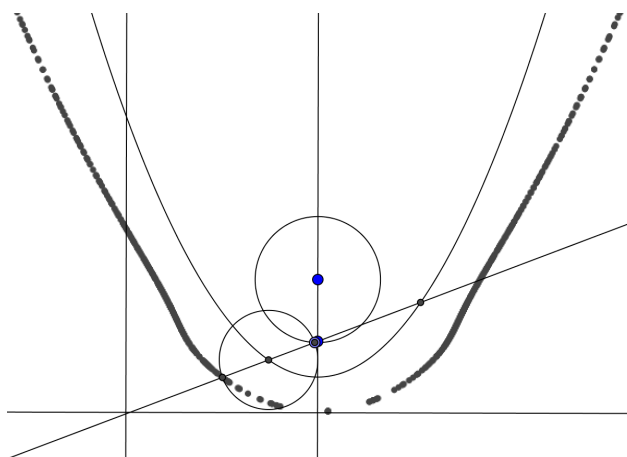
Wenn der Mittelpunkt des Kreises auf dem Brennpunkt liegt, dann ist die obere Schleife der Figur ganz verschwunden und es bleibt nur noch die untere Spurenfigur übrig, die wie eine Schwalbe aussieht:



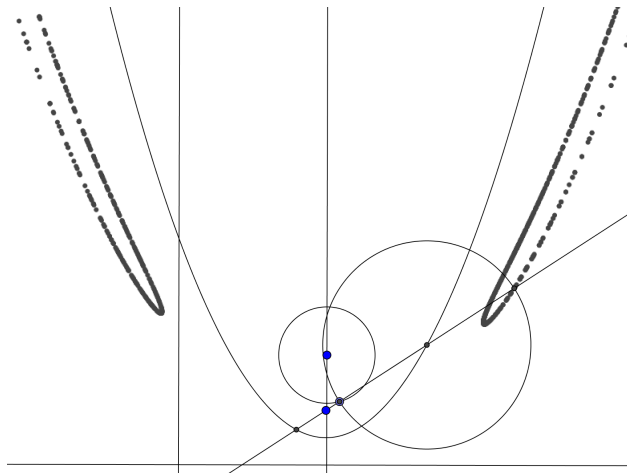
Wenn der Mittelpunkt des Kreises über dem Brennpunkt der Parabel liegt, dann ähnelt die Spurenfigur der Parabel. Sie ist jedoch nach unten verschoben und breiter. Sie schneidet die Parabel nicht mehr. Siehe Zeichnung unten.



Wenn der untere Teil des Kreises den Brennpunkt berührt, dann verändert sich die Spurenfigur noch einmal. Siehe Zeichnung unten:



Wenn der Kreis dann ganz über den Brennpunkt nach oben geschoben wird, dann entstehen zwei neue Figuren rechts und links oben neben der Parabel.



5 Ergebnisse

Ich habe herausgefunden,

- wie man mit GeoGebra Classic Punkte, Linien, Kreise und Parabeln konstruieren kann
- dass man in GeoGebra die Spuren von Punkten verfolgen lassen kann
- was eine Parabel ist und dass ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel und eine Hyperbel entstehen, wenn man einen Kegel unterschiedlich durchschneidet
- wie man an einer Geraden und auch an einer Parabel spiegelt
- dass man wirklich geometrische Figuren wie eine Linie und einen Kreis an einer Parabel spiegeln kann und das dabei Formen entstehen, die man sich vorher mit Sicherheit nicht vorstellen kann

Lösung der Knobelaufgabe von S. 15

- (1) $7 + 13 = 20$
- (2) $20 \cdot 2 = 40$
- (3) $40 : 5 = 8$
- (4) $8 + 3 = 11$
- (5) $9 \cdot 9 = 81$
- (6) $9 - 7 = 2$