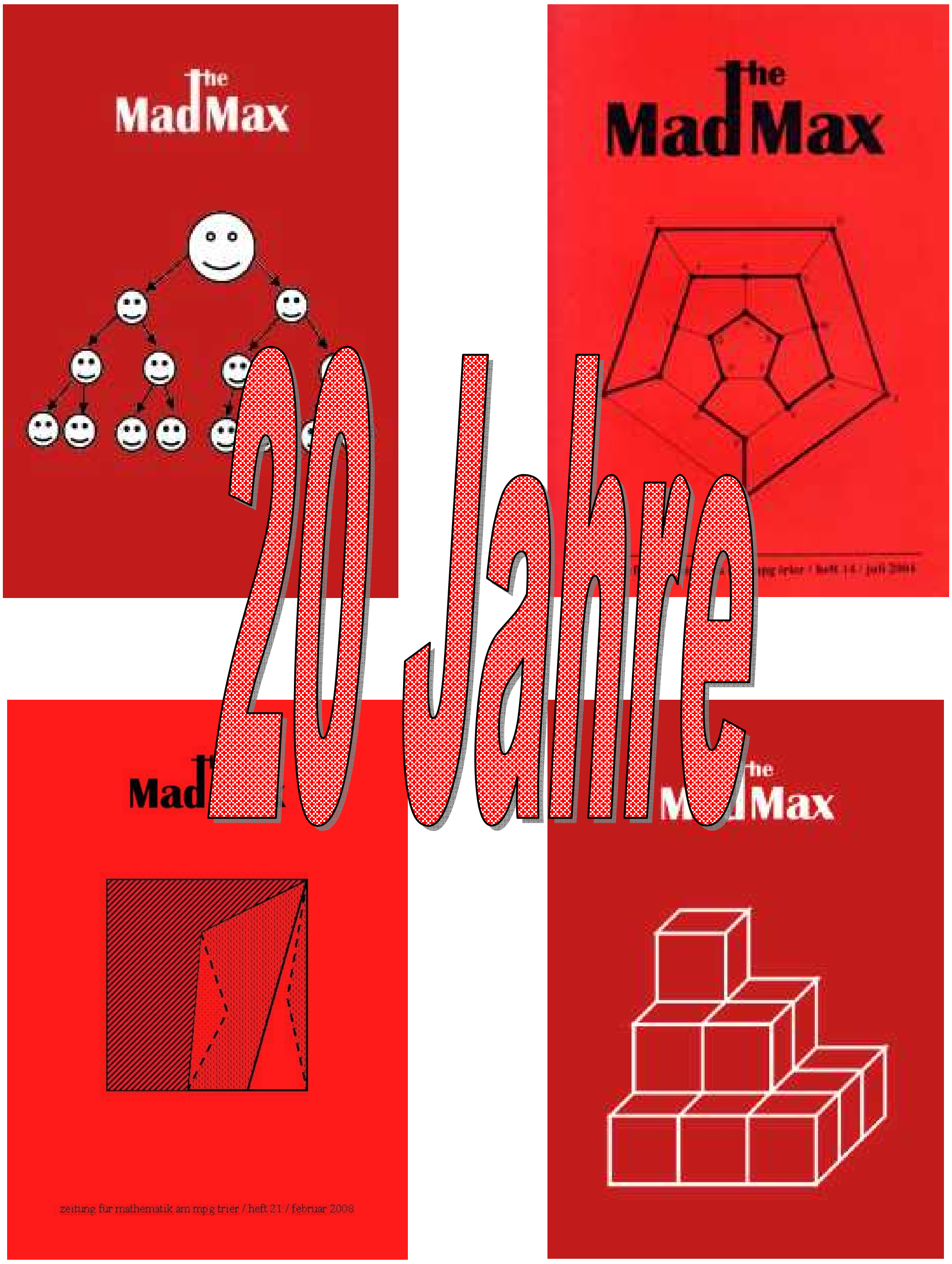
The MadMax



zeitung für mathematik am mpg trier/ heft 40/ september 2017

Liebe MadMax – Freunde,
dieses Mal haben wir Grund zum Feiern: vor 20 Jahren erschien der erste MadMax als Mathezeitung von Schülern für Schüler am MPG. Damals waren es vor allem Oberstufenschülerinnen und -schüler, die sich in der von Joachim Lillig gegründeten AG „Mathematik für Spezialisten“ trafen und außerhalb des Unterrichts mathematische Probleme behandelten.
Als ich die AG 1997 übernahm, wollte ich, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse einem breiteren Publikum präsentierten und entwickelte mit ihnen das Konzept des MadMax. Spannend war die Diskussion um ein passendes Logo. Der vermeintliche Anglizismus „the“ Madmax entpuppt sich beim genaueren Hinschauen als ein hochgestelltes „the“ im Ma$^{\text{the}}$max. „Mad“ war natürlich Selbstironie pur, ein Spiel mit der Eigenschaft, die man Mathematikern bisweilen zuordnet. Der „Max“ ist für die MPG-Gemeinde selbstredend und bei der gebräuchlichen Kurzform MadMax stand ein Film mit Tina Turner und Mel Gibson Pate.
Im Jubiläumsheft findet ihr Artikel des aktuellen Teams, die Ergebnisse des Mathematikleistungskurses 11ML1 aus diversen Modellierungsprojekten und ein paar Beiträge ehemaliger Autoren (J. Merz, P. Neises, D. Gindorf, G. Lex und E.Hans).
Viel Spaß beim Lesen und Mitdenken

Hans Willkomm und euer MadMax –Team

Inhaltsverzeichnis		**Seite**

Stammbrüche als Summen von Stammbrüchen

1. Unser Ausgangsproblem

In unserer Mathe-AG haben wir uns mit Stammbrüchen beschäftigt. Das sind Brüche mit einer 1 im Zähler. Als Starterproblem haben wir folgendes ausgewählt: Kann man $\frac{1}{2}$ als Summe von zwei anderen Stammbrüchen schreiben?

Es geht zum Beispiel so: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

Allgemein kann man untersuchen, welche 2 Stammbrüche als Summe einen vorgegebenen Stammbruch ergeben.

Allgemein: $\frac{1}{a} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

Für dieses Problem haben wir zwei schöne Formeln entdeckt.

2. Ein einfacher Trick

Am nächstliegenden ist es, den Nenner der Summanden zu verdoppeln, den Zähler aber gleich zu lassen. So erhalten wir die beiden Hälften der Summe.

Beispiel: $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

Allgemein: $\frac{1}{a} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}$

3. Der um 1 größere Nenner

Nun ändern wir unsere Strategie. Wir addieren zum Nenner des ersten Summanden eine 1. Wir wollen nun einen Weg für den Nenner des zweiten Summanden finden.

Zuerst haben wir den zweiten Bruch mit einer Umkehrrechnung identifiziert.

Beispiel: $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Nun wollen wir herausfinden, ob es eine Formel gibt, mit der man den zweiten Summanden direkt berechnen kann. Dabei ist uns aufgefallen, dass wenn man den Nenner des ersten Summanden, mit dem Nenner der Summe multipliziert, man den Nenner des zweiten Summanden herausbekommt.

Andere Lösung des obengezeigten Beispiels:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{12}$$

Allgemein: $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a \cdot (a+1)}$

Mit unseren beiden Formeln kann man jede Stammbruch auf zwei Arten als Summe von zwei anderen Stammbrüchen schreiben.

Projekttage „Mathematische Modellierung“ mit dem Leistungskurs 11ML1

Im Unterricht werden Schüler häufig mit **sogenannten** Anwendungsaufgaben konfrontiert. Warum die Einschränkung?

Die Aufgaben sind in der Regel wenig komplex, in der Formulierung schon auf den gerade behandelten Unterrichtsstoff zugeschnitten, so dass der mathematische Ansatz direkt aufgestellt werden kann. Mathematische Modellierung verlangt mehr. Hier muss eine reale Fragestellung zunächst in die Sprache der Mathematik übersetzt werden, um dann mit Hilfe selbst zu wählender mathematischer Werkzeuge gelöst zu werden. Die mathematische Lösung muss dann wieder in die Sprache des Anwenders rückübersetzt und mit dem Anwender diskutiert werden.

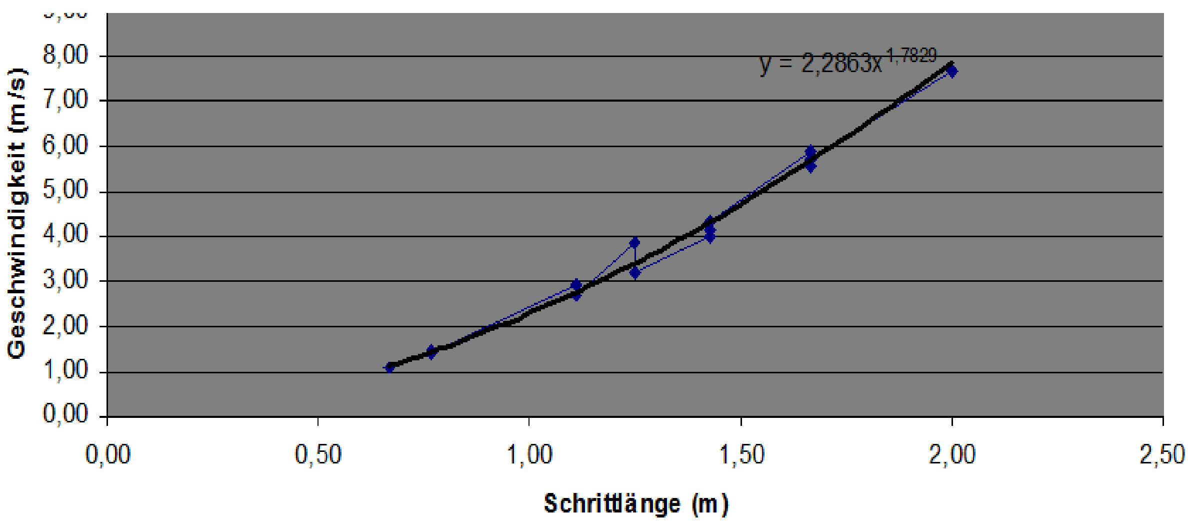
Der Leistungskurs 11ML1 des MPG hatte zwei Tage Zeit, um während der Projekttage 2017 in fünf Gruppen jeweils ein Problem zu bearbeiten.

1. Schrittlänge und Lauftempo

Der ersten Gruppe lag ein Artikel vor, wonach es Wissenschaftlern mit unterschiedlichen Methoden gelungen sei, wie man aus prähistorischen Fußspuren von Dinosauriern auf das Lauftempo der Tiere schließen kann. Auch mit Recherchen im Internet konnte aber keine Formel gefunden werden. Sie sollten also selbst eine Formel entwickeln, um mithilfe der Fußspuren das Lauftempo berechnen zu können. Verständlicherweise übertrugen sie das Problem auf den Menschen.

Zur Datenerhebung hat diese Gruppe Versuchsreihen im Innenhof durchgeführt und dabei einen Zusammenhang zwischen der Schrittlänge (= Abstand zweier Fußspuren) und der Geschwindigkeit des Läufers gefunden:

Natürlich gibt es Abweichungen und die Anzahl der Testpersonen war noch zu gering. So konnte insbesondere noch nicht überprüft werden, welche Rolle die Beinlänge bei diesem Problem spielt.



2. Basketball-Contest

Eine zweite Gruppe sollte einen **MPG Individual Basketball-Contest** für Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 -13 entwickeln, der aus folgenden drei Aufgaben bestehen sollte:

- 50 m Speed-Dribbling
- Hindernisdribbling über einen vorgegebenen Parcour
- Freiwürfe: In 30 Sekunden wird versucht, so viele Körbe wie möglich zu erzielen.

Aufgabe war es, ein Bewertungssystem zu entwickeln, dass Schülerinnen und Schüler aller Jahrgangsstufen die gleiche Chance haben zu gewinnen. Die drei Disziplinen sollten dabei gleich stark gewichtet sein. Dazu hat die Gruppe Mädchen und Jungen aller Altersstufen in den drei Disziplinen getestet und Durchschnittszeiten für jede Kombination aus Alter und Geschlecht bestimmt. Diese sollten in jeder Disziplin zu 1000 Punkten führen.

Beim Dribbling haben sie dafür eine Punktetabelle für die zehnjährigen erstellt und Alter und Geschlecht über einen Multiplikator berücksichtigt.

Beispiel:

Durchschnitt Junge, 10 Jahre: 13,0 Sekunden

Durchschnitt Junge, 15 Jahre: 9,2 Sekunden

Multiplikator: 9,2 : 13 = 0,71

Dribbling Jungen			
Zeit	Punkte	Alter	Multiplikator
5	2200		
5,5	2125	19	0,54
6	2050	18	0,62
6,5	1975	17	0,64
7	1900	16	0,68
7,5	1825	15	0,71
8	1750	14	0,75
8,5	1675	13	0,81
9	1600	12	0,82
9,5	1525	11	0,92
10	1450	10	1,00
10,5	1375		
11	1300		
11,5	1225		
12	1150		
12,5	1075		
13	1000		
13,5	925		
14	850		

Wie der Ausschnitt aus ihrer Tabelle zeigt, heißt das, dass ein zehnjähriger Junge für die Durchschnittszeit seines Alters von 13 Sekunden 1000 Punkte erhält, ein 15jähriger aber nur 1000 mal 0,71 = 710 Punkte.

Interessant: So kompliziert war es nur beim Speed-Dribbling. Nur hier musste nach Alter und Geschlecht differenziert werden.

Beim Hindernisdribbling spielt nur das Alter eine Rolle, weil die hier geforderte Koordinationsfähig zwar mit dem Alter zunimmt, aber wohl geschlechtsunabhängig ist.

Bei den Freiwürfen spielte dann auch das Alter keine Rolle mehr. Wegen der geringen Zahl an teilnehmenden Schülern müsste dieses Ergebnis – wie auch die anderen – aber sicher noch statistisch abgesichert werden.

3. Urbane Seilbahnen

Der überbordende Autoverkehr verstopft Straßen. Häufige Staus und entsprechend schlechte Atemluft sind an der Tagesordnung. Wenn Öffentliche Verkehrsmittel auch im Stau stecken bleiben, weil für eigene Busspuren kein Platz ist, dann wird der Öffentliche Verkehr (ÖPNV) weniger attraktiv und alle fahren dann doch lieber mit dem Auto. Der Bau von U-Bahnen unter dem Stau ist zu teuer und der Bau von neuen Verkehrswegen äußerst schwierig.

Wäre hier eine Gondelbahn eine interessante Ergänzung des ÖPNV in Trier? Dazu sollte eine dritte Gruppe ein Konzept für die Innenstadt unter Berücksichtigung der Personenzahlen, der Kosten für Bau und Unterhaltung entwerfen.

Das Projekt erwies sich als sehr komplex und die Gruppe hatte eine Reihe von Entscheidungen zu treffen und musste viele Parameter aufeinander abstimmen. Mit Hilfe von Excel-Tabellen modellierten sie ein Konzept für die Stadt Trier, das den Alleenring entlasten könnte. Mit nach Internetrecherchen errechneten Baukosten von 17,7 Mio. €, Unterhaltungskosten von 170000 € pro Jahr und einer Abschreibung auf 10 Jahre ergab sich in ihrem Modell ein Ticketpreis von 1,10 €. Dabei wurde ein kundenfreundlicher Zeittakt genauso berücksichtigt wie sinnvolle Schätzungen über die Nachfrage dieses Angebots.

4. Sushi auf dem Laufband

Bei Stichproben aus fünf Sushi-Restaurants in zwei deutschen Großstädten stellten Kontrolleure eine viel zu hohe Raumtemperatur in den Restaurants fest. Spitzenwert war eine Temperatur von über 24 Grad - viel zu warm für den rohen Fisch. Die Temperaturen der Sushi selbst lagen zum Teil auch über 20 Grad.

Und da liegt das Problem, weil insbesondere bei mangelnder Hygiene zum Beispiel Darm- oder Colibakterien, Salmonellen oder Listerien den Fisch befallen und sich schon bei Zimmertemperatur rasch vermehren.

Die Gruppe sollte überprüfen, ob das wirklich ein Problem ist, indem sie dazu Modelle erstellt, wie lange, wie viele Sushi auf dem Band im Durchschnitt kreisen. Berücksichtigt werden sollte neben der Anzahl der Gäste und der Beliebtheit bestimmter Sushi auch, dass Lücken auf dem Band durch neue Sushi wieder aufgefüllt werden.

Dieses Thema erwies sich als schwierig, weil den Schülern noch die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung fehlten. Aber in einfachen Modellen konnte hier zumindest für die beliebteren Sushi Entwarnung gegeben werden. Das Ergebnis könnte aber durchaus anders ausfallen, wenn die Modelle näher an die Realität angepasst werden.

5. Schnell- und Langsamgeher

Bereits im MadMax17 hat sich ein ehemaliger MPG-Schüler mit folgendem Problem befasst:

„Wenn man in einer Stadt in ein Geschäft geht, kann man, während man auf den Verkäufer wartet, gut aus dem Schaufenster gucken. Um die Wartezeit zu verkürzen kann man Personen zählen. Dabei fällt auf, dass einige Leute schnell und einige langsam gehen. Wenn man diese zählt, kommt man bei 100 Passanten z.B. auf 25 “Schnellgeher“ und 75 “Langsamgeher“. Aber was sagt diese Zahl aus? Wohnen in der Stadt tatsächlich 25% “Schnellgeher“ und 75% “Langsamgeher“? Die Personen können ja auch in der Messzeit nicht angekommen sein, was eher für die Langsamgeher gilt.“

Der Schüler hatte damals ein mathematisches Modell einer Stadt mit „Schnell- und Langsamgehern“ entwickelt, um die Frage nach dem Prozentsatz der in der Stadt lebenden „Schnell- und Langsamgeher“ beantworten zu können.

Die Gruppe hat dieses Modell kritisch analysiert und im wesentlichen verifizieren können. Anschließend haben sie es auf drei „Gehtypen“ erweitert und eine Formel angegeben, mit der man auch in diesem Fall in einem einfachen Stadtmodell im Prinzip aus der gezählten Anzahl der Langsam- , der Mittelschnell- und der Schnellgeher die wirklich in der Stadt wohnenden Einwohner dieser drei Gehtypen berechnen kann.

Fazit

In einer leider viel zu kurzen Zeit konnten sich alle Gruppen in das Thema einarbeiten und ein Gefühl für die Problemstellung entwickeln. Es konnten mehr oder weniger komplexe Modelle entwickelt und bearbeitet werden. Natürlich sind auch die gewählten Probleme in der Komplexität noch weit weg von den Fragestellungen, die von Anwendern an Mathematiker herangetragen werden, aber die Tage waren ein gelungener Einstieg in die Welt der mathematischen Modellbildung.

Mehr als man glaubt – versteckte Figuren

1. Das wollte unser Lehrer wissen

Wie viele Quadrate sind in dem folgenden Rechteck versteckt? Das haben wir untersucht.

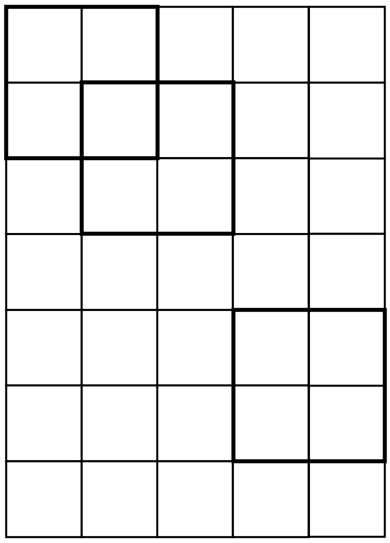
Es gibt nicht nur 5 x 7 = 35 kleine Quadrate

Sondern auch : 4 x 6 = 24 (2 x 2 Quadrate)

3 x 5 =15 (3 x 3 Quadrate)

2 x 4 = 8 (4 x 4 Quadrate)

1 x 3 = 3 (5 x 5 Quadrate)

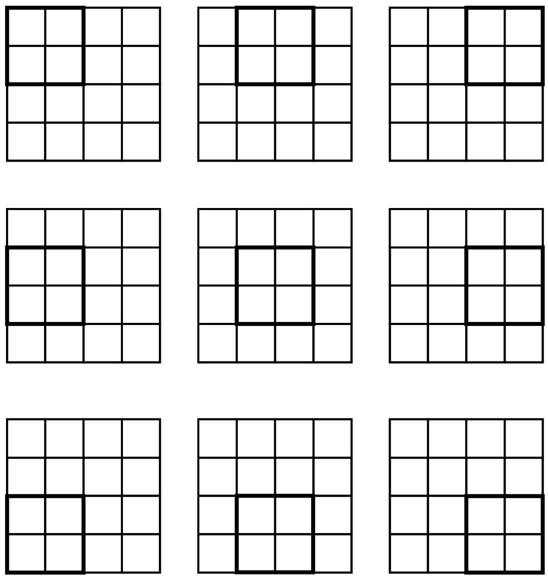


In unserer Mathematik - AG hatten Schüler letztes Jahr untersucht, wie viele Quadrate in einem **4x4 Quadrat** versteckt sind.

2. Quadrate in Quadraten

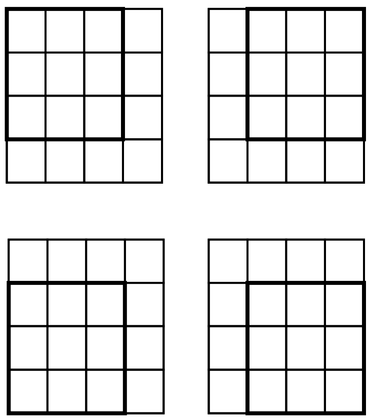
Das haben unsere Vorgänger herausgefunden:

Beim 4 x 4 Quadrat gibt es 4 x 4 = 16 kleine Quadrate und ein großes. Außerdem kann man das fett markierte 2 x 2 Quadrat an 3 x 3 = 9 verschiedenen Stellen finden.



Außerdem gibt es noch vier 3 x 3 Quadrate:

Insgesamt sind es also 30 Quadrate: innen 16 ganz kleine Quadrate, dann 9 mittelgroße 2 x 2 Quadrate, 4 größere 3 x 3 Quadrate und außen 1 großes 4 x 4 Quadrat.



Kurz: 1 + 4 + 9 + 16 = 30.

Bei einem 5 x 5 Quadrat waren es 55 Quadrate, nämlich 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55 ist.

3. Die Lösung beim n x n Quadrat

Jetzt wollen wir beliebig große Quadrate untersuchen.

Beim 1 x 1 Quadrat hat man nur 1 kleines Quadrat.

Beim 2 x 2 Quadrat hat man 1 2 x 2 Quadrat und 4 1 x 1 Quadrate.

Beim 3 x 3 Quadrat hat man 1 3 x 3 Quadrat, 4 2 x 2 Quadrate und. 9 1 x 1 Quadrate.

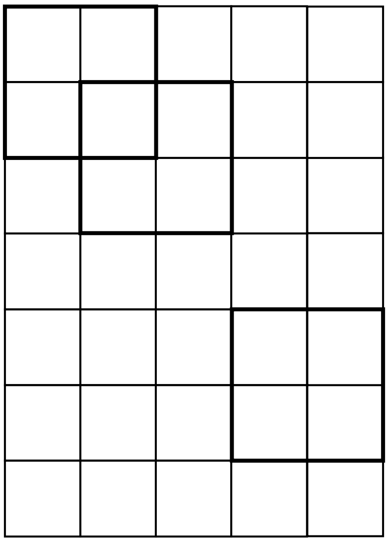
Beim 4 x 4 Quadrat hat man1 4 x 4 Quadrat, 4 3 x 3 Quadrate, 9 2 x 2 Quadrate und 16 1 x 1 Quadrate.

Beim 5 x 5 Quadrat hat man1 5 x 5 Quadrat, 4 4 x 4 Quadrate, 9 3 x 3 Quadrate, 16 2 x 2 Quadrate, und 25 1 x 1 Quadrate

Beim n x n Quadrat gibt es 1 n x n Quadrat, 4 (n-1) x (n-1)   Quadrate, … und n^2 1x1 Quadrate.

Also insgesamt: 1 + 4 + 9 + … + n^2 Quadrate.

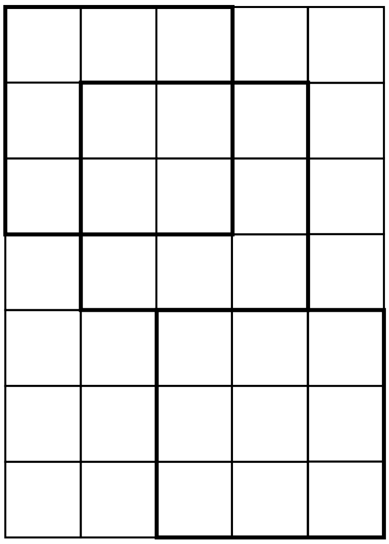
4. Die Lösung beim 5 x 7 Rechteck



Jetzt wollen wir noch andere Rechtecke untersuchen. Hier erklären wir, wie viele kleine Quadrate in ein 5 x 7 Rechteck passen, wie viele 2 x 2 Quadrate und so weiter.

Auf jeden Fall passen 7 x 5 = 35 kleine Quadrate in das Rechteck.

In die oberen beiden Reihen passen 4 von den 2 x 2 Quadraten, eine Reihe tiefer noch mal 4 und jede Reihe tiefer auch noch mal 4. Also insgesamt 6 x 4 = 24 2 x 2 Quadrate.



Weiter geht es mit den 3 x 3 Quadraten:

In die oberen drei Reihen passen 3 von den 3 x 3 Quadraten, eine Reihe tiefer noch mal 3 und jede Reihe tiefer auch noch mal 3. Also insgesamt 5 x 3 = 15 3 x 3 Quadrate.

Wie viele 4 x 4 Quadrate passen?

Wir haben eine Methode erkannt: wir müssen immer 1 bei den Faktoren subtrahieren, also sind es 4 x 2 = 8 4x4-Quadrate.

Wie viele 5 x 5 Quadrate ?

Bei dem 5 x 5 Quadrat wird noch mal 1 von den Faktoren subtrahiert: 3 x 1 = 3 5x5-Quadrate und 2 x 0 = 0 6x6-Quadrate (6x6-Quadrate passen nämlich nicht mehr rein).

Wie viele Quadrate sind es dann insgesamt?

3 x 1 + 4 x 2 + 5 x 3 + 6 x 4 + 7 x 5

= 3 + 8 + 15 + 24 + 35 = 85

5. Nun das 6 x 11 Rechteck

Das wollen wir jetzt ganz ohne Zeichnung ausrechnen. Es passen zuerst 11 x 6 kleine Quadrate rein und von den größeren 11 x 6 + 10 x 5 + 9 x 4 + 8 x 3 + 7 x 2 + 6 x 1. Die letzten 6 sind die 6 x 6 Quadrate.

Insgesamt sind also 196 Quadrate in dem Rechteck versteckt.

Das wollen wir noch allgemein untersuchen.

Das Problem mit der Unendlichkeit

Hallo alle miteinander,
ich bin der Jean, habe 2009 am MPG mein Abi gemacht und war, soweit ich mich erinnern kann, seit der fünften Klasse mit dabei. Ich hab dann nach einiger Zeit eine Ausbildung gemacht, arbeite jetzt bei Westnetz in der Planung und mache nebenher noch den Techniker und ein Fernstudium. Mal schauen, wie gut das klappt ☺
Mir sind aus der Mathe AG Zeit viele schöne Erinnerungen geblieben, auf eine aber, möchte ich besonders eingehen. Es geht um eine Diskussion über das Problem mit dem Hotel aus Heft 10. Kurz: es geht um ein ausgebuchtes Hotel, das unendlich viele Gäste beherbergt. Nun kommt abends ein Gast zum ausgebuchten Hotel und möchte ein Zimmer. Kein Problem, der Gast aus Zimmer 1 kommt in Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 in Zimmer 3 und so weiter. Anschließend kommt der neue Gast in Zimmer 1. Was ich damals nicht so verstand: warum hat man den neuen Gast nicht direkt ins Zimmer gesetzt, in dem der letzte Gast war? Inzwischen habe ich gelernt, sobald Mathematiker mit Unendlichkeiten anfangen, wird es mit den Regeln der Logik für Nichtmathematiker etwas schwierig. Und dazu möchte ich einen interessanten Beweis vorstellen.

Es geht um die Summe S mit der Frage, wie groß ist das Ergebnis S:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots \text{ (bis ins Unendliche weitergeführt)}$$

Die meisten werden jetzt sagen: logisch gesehen, ist das Ergebnis unendlich. Soweit würde das auch stimmen, vorausgesetzt, die Frage käme nicht von einem Mathematiker. Ein Mathematiker kommt nämlich auf ein komplett anderes Ergebnis. Für den Beweis brauche ich aber zwei Hilfssummen, S_1 und S_2. Fangen wir mit S_1 an.

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Logisch gesagt würde man sagen, das hat kein festes Ergebnis, denn es springt zwischen 1 und 0 hin und her. Soweit richtig, ABER, wir erinnern uns an den Mathematiker… Der hat sich nämlich einen schlauen Trick einfallen lassen. Er addiert die Summe mit sich selbst, und schreibt sie untereinander, um eine Stelle verschoben:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
S_1 + S_1 = & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & \ldots & & \\
 & & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & \ldots \\
\quad = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & & \\
 & & \multicolumn{3}{c}{-1 + 1 = 0} & \multicolumn{3}{c}{+1 - 1 = 0} & \multicolumn{3}{c}{-1 + 1 = 0} & & \\
\Leftrightarrow \quad 2 * S_1 = & & 1 & & & & & & & & & \\
\Leftrightarrow \quad S_1 = & & 1/2 & & & & & & & & &
\end{array}$$

Soweit so gut. Nun zur Summe S_2:

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$$

Der Mathematiker schaut sich diese Summe mit einem müden Lächeln an und verwendet den gleichen Trick wie vorhin.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
S_2 + S_2 = & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & \ldots & \\
 & & + & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + \\
\quad = & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - \\
 & & \multicolumn{3}{c}{-2 + 1 = -1} & \multicolumn{2}{c}{+3 - 2 = +1} & \multicolumn{3}{c}{-4 + 3 = -1} & & \\
\Leftrightarrow 2S_2 = & S_1 & = & \tfrac{1}{2} & & & & & & & \\
\Leftrightarrow S_2 = & \tfrac{1}{4} & & & & & & & & &
\end{array}$$

Während man sich bei der Summe S_1 noch auf ½ einigen kann, immerhin springt der Wert zwischen 1 und 0 und ½ ist da eben der Mittelwert, ist es bei der Summe S_2 schon schwerer sich das Ergebnis anschaulich vorzustellen, immerhin springt sie hin und her von 1 auf -1 auf 2, -2, 3, -3 und so weiter. Wie gesagt, versucht es nicht mit Logik.

Nun sind wir aber noch nicht ganz am Ziel, ein Schritt fehlt noch. Und zwar:

$S - S_2 =$	**1**	**+**	**2**	**+**	**3**	**+**	**4**	**+**	**…**	
-	(**1**	**-**	**2**	**+**	**3**	**-**	**4**	**+**	**…**	)

Man beachte die Minusklammer, bei deren Auflösung sich die Vorzeichen umkehren:

$S - S_2 =$	**1**	**+**	**2**	**+**	**3**	**+**	**4**	**+**	**…**		
-	**1**	**+**	**2**	**-**	**3**	**+**	**4**	**-**	**…**		
=	0	+	4	+	0	+	8	+	…		
=	4	*	(	1	+	2	+	3	+	…	)
=	4	*	S								

Um es in Worte zu fassen: man zieht von einer Summe eine andere Summe ab und erhält das Vierfache der ursprünglichen Summe. So etwas schaffen auch nur Mathematiker. Aber damit noch nicht genug, es geht ja noch weiter:

$$S - S_2 = 4*S \quad |-S$$
$$\Leftrightarrow -S_2 = 3*S$$
(Wir erinnern uns: $S_2 = \frac{1}{4}$)
$$\Leftrightarrow -\tfrac{1}{4} = 3*S \quad |:3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\mathbf{S = -1/12}}$$

Um das nochmal in Worte zu fassen: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + … = – 1/12!

Mathematiker sind schon ein verrücktes Völkchen. Deswegen, oberste Regel: Spielt niemals mit der Unendlichkeit rum, wenn ihr nicht genau wisst, was ihr tut. Denn mit großer Macht kommt auch große Verantwortung ☺
Wem das aber noch nicht reicht, es gibt auch folgende Aussagen:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots = 0$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots = 1/120$$
$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \ldots = 0$$
(Für alle Summen mit geradem Exponenten ist das Ergebnis 0)

Der „Beweis“ für diese Summen ist leider nicht mehr so einfach, deswegen lasse ich das einfach mal so wortlos stehen und wie ein Mathematiker jetzt sagen würde: „Einfach hinnehmen“ oder „Vertraut mir, das ist richtig“ ☺ oder „Vielleicht ist es ja auch ganz anders!“
Jean-Philippe Merz

Zahlen als Summe von zwei Primzahlen

Wir wissen, dass Primzahlen nur durch 1 und durch sich selber teilbar sind und das man sie nicht in ein Produkt von zwei anderen natürlichen Zahlen zerlegen kann. Aber wir haben etwas anderes untersucht. Unser Lehrer wollte, dass wir natürliche Zahlen als Summe von zwei Primzahlen schreiben.

Zum Beispiel: 7 = 2 + 5 oder 16 = 3 + 13.

Schnell haben wir festgestellt, dass es nicht immer möglich ist. Bei der 11 oder der 17 geht es zum Beispiel nicht. Probleme hatten wir aber nur bei ungeraden Zahlen.

Deshalb hatten wir folgende Vermutung:

1. Alle geraden Zahlen kann man als Summe von zwei Primzahlen schreiben.
2. Bei den ungeraden geht es manchmal, aber nicht immer.

Für die geraden Zahlen haben wir bis 100 passende Summen gefunden:

4 = 2 + 2	40 = 3 + 37	76 = 3 + 73
6 = 3 + 3	42 = 5 + 37	78 = 5 + 67
8 = 3 + 5	44 = 3 + 41	80 = 7 + 73
10 = 3 + 7	46 = 3 + 43	82 = 3 + 79
12 = 5 + 7	48 = 5 + 44	84 = 5 + 79
14 = 3 + 11	50 = 3 + 47	86 = 3 + 83
16 = 3 + 13	52 = 5 + 47	88 = 5 + 83
18 = 5 + 13	54 = 7 + 47	90 = 7 + 83
20 = 3 +17	56 = 3 + 53	92 = 3 + 89
22 = 3 + 19	58 = 5 + 53	94 = 3 + 91
24 = 5 + 19	60 = 7 + 53	96 = 5 + 91
26 = 3 + 23	62 = 3 + 59	98 = 7 + 91
28 = 5 +23;	64 = 3 + 61	100 = 3 + 97
30 = 7 + 23	66 = 5 + 61	
32 = 3 + 29	68 = 7 + 61	
34 = 3 + 31	70 = 3 + 67	
36 = 5 + 31	72 = 5 +67	
38 = 7 + 31	74 = 3 + 71	

Bei einer Summe aus zwei Zahlen erhält man nur dann eine ungerade Zahl, wenn die eine Primzahl die 2 ist. Bei ungeraden Zahlen geht es also nur dann, wenn man sie als 2 + ungerade Primzahl schreiben kann und das ist nicht oft der Fall.

Bauen für die Welt von morgen – Bauingenieure gestalten

Ingenieure gestalten wie kaum eine andere Berufsgruppe unser Lebensumfeld. Dabei wird der Beitrag der Bauingenieure und die große Breite ihres Arbeitsfelds besonders deutlich sichtbar.

Die Tätigkeit von Bauingenieuren zeigt sich an vielen entscheidenden Stellen unseres Lebensraums.Dies reicht vom konstruktiven Ingenieurbau, welcher z.B. Brückenbauwerke, Hochhäuser, Kraftwerke, neue Werkstoffe und Bauweisen umfasst über den Baubetrieb und der Immobilienökonomie, die sehr betriebswirtschaftlich geprägt sind, hin zum technischen Infrastrukturbereich, wo sich mit Themen wie der Wasserversorgung, der Abwasser- und Abfallbeseitigung, der Verkehrsplanung und der Gewässerbewirtschaftung sowie dem Hochwasserschutz befasst wird.

Besonders der Hochwasserschutz stellt dabei im Bereich der technischen Infrastrukturplanung eine interdisziplinäre und spannende Tätigkeit für Bauingenieure dar. Durch verheerende Hochwasserereignisse mit Milliardenschäden und der Anhäufung von Werten in überschwemmungsgefährdeten Gebieten hat sich der technische Hochwasserschutz, der von einem Sicherheitsgedanken geprägt war, in den letzten 20 Jahren gewandelt. Heute spricht man von Hochwasserrisikomanagement, welches Unsicherheiten, Verletzbarkeiten sowie das Versagen von technischen Anlagen berücksichtigt. Ziel des Hochwasserrisikomanagements ist es, die hochwasserbedingten nachteiligen Folgen auf die menschliche Gesundheit, die Umwelt, das Kulturerbe und wirtschaftliche Tätigkeiten zu verringern. Dies kann durch unterschiedliche Maßnahmen umgesetzt werden, sodass der moderne Bauingenieur im Bereich der Wasserwirtschaft und des Wasserbaus, unter den auch das Hochwasserrisikomanagement fällt, breit aufgestellt sein muss. Auf der einen Seite müssen fachliche Maßnahmen geplant werden, wozu man vielfältige mathematische und physikalische Grundlagen, vor allem im Bereich der Hydromechanik, verstehen muss, auf der anderen Seite spielt modernste Software wie Geoinformationssysteme und hydraulische Modellierungssoftware eine große Rolle. Auch Diskussionsrunden und Beratungen für von Hochwasser betroffenen Bürgern, die Erstellung von Informationsmaterial, eine Mitgestaltung im Katastrophenschutz hinsichtlich Starkregen und Flusshochwasser sowie im Bereich der Forschung der Einsatz von Drohnen für Feldmessungen kann zu der Aufgabe eines Bauingenieurs gehören.

Die Klischees, ein Bauingenieur ist eine Person mit Bauhelm, ein Betonkopf oder ein Rechenknecht für die wirklichen Gestalter, die Architekten, trifft bei weitem nicht zu. Besonders das Thema Nachhaltigkeit spielt im Bauingenieurwesen eine große Rolle. Viele Projekte müssen in Einklang mit der Natur umgesetzt werden oder haben wie der technische Infrastrukturbereich mit den Hauptthemen Wasser und Verkehr einen starken Umweltbezug.

Natürlich muss man als Bauingenieur breite wissenschaftliche Grundlagen mitbringen, um anwendungsorientiert und innovativ arbeiten zu können. Daher spielt besonders die Vorbildung in der Schule eine sehr wichtige Rolle. Trotz interdisziplinärem Arbeiten und vielfältigen Möglichkeiten sich zu spezialisieren, sollte eine Neigung für Naturwissenschaften und Technik vorhanden sein. So sind von den allgemeinen Schulfächern besonders Mathematik, Physik und Englisch wichtige Grundlagen, um ein erfolgreicher Ingenieur zu werden.
Weitere allgemeine Informationen findet Ihr auf http://www.werde-bauingenieur.de/.

Kontakt:
Dipl.-Ing. Michael Eiden
Wissenschaftlicher Mitarbeiter
Technische Universität Kaiserslautern
Fachgebiet Wasserbau und Wasserwirtschaft
Paul-Ehrlich-Straße, Gebäude 14
67663 Kaiserslautern

Telefon: +49 631 - 205 3194
Telefax: +49 631 - 205 3904
Email: michael.eiden@bauing.uni-kl.de
Internet: www.bauing.uni-kl.de/fww/home/

Fakultäten und Nullen

1. Einleitung

Im Wettbewerb ,,Mathematik ohne Grenzen“ gab es eine Aufgabe in der gefragt wurde, wie viele Nullen die Zahl 2017! hat. Als erstes haben wir uns dann gefragt, was „! = Fakultät“ ist. Unser Lehrer hat es uns erklärt.

Beispiel: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
Man muss also 6 mit der 5 multiplizieren und jeder weitere Faktor ist eins kleiner. Wenn man 6! berechnet erhält man 720, eine Null. Also hat 6! eine Null.

Leider ist 2017! zu groß. Der Taschenrechner kann das nicht rechnen, weil das Ergebnis zu groß ist. Daher können wir nicht herausfinden wie viele Nullen das Ergebnis hat. Deshalb müssen wir eine andere Methode finden.

2. Systematische Untersuchung der Fakultäten auf Nullen

Bei einem anderen Beispiel sieht man, wann bei der Fakultät am Ende eine Null dazu kommt: $13! = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.227.020.800$

Bei der 5 kommt eine Null dazu, weil man 2x5 rechnen kann und das ergibt 10.
Durch den Faktor 10 kommt noch eine Null dazu, weil die 10 alleine eine Null hat.
Deshalb hat 13! Insgesamt 2 Nullen am Ende.
Bei 17! kommt noch die 15 vor 15x4=60 deshalb sind es 3 Nullen.
Also bei jedem Faktor, der durch 5 teilbar ist kommt eine Null dazu.

3. Unsere Idee für 2017!

Immer wenn man eine Zahl aus der Fünferreihe mit einer geraden Zahl multipliziert, kommt eine Null dazu. Außer bei den 25er Schritten: Dann kommen zwei Nullen dazu, weil man 4x25=100 rechnen kann und am Ende der 100 zwei Nullen sind. Bei den 125er Schritten kommen drei Nullen dazu, weil man 8x125=1000 rechnen kann. Und bei den 625er Schritten sind es sogar vier Nullen. Also müssen wir raus finden, wie viele 5er, 25er, 125er und 625er Schritte in der Zahl 2017 stecken. Das schaffen wir bis zur nächsten Ausgabe.

Ein Grußwort von Patrick Neises und Damian Gindorf

In unserer Zeit beim MadMax haben wir, Damian und Patrick, unter der Betreuung von Herrn Willkomm einen Beitrag veröffentlicht, den wir ebenso bei Jugend forscht / Schüler experimentieren eingereicht haben. Mit diesem haben wir damals den zweiten Platz belegt.

Eine kleine Anekdote am Rande: Damian war damals in unserer Klasse der kleinste und Patrick der größte Schüler. Der Größenunter-schied wurde auf dem Siegerfoto festgehalten und erinnert uns bis heute an dieses Projekt. Nun, 12 Jahre später, ist Damian sogar größer, was damals keiner von uns gedacht hätte. Wir haben uns daher getroffen, um auch aus heutiger Sicht noch ein Bild aufzunehmen.

Diese Anekdote und die gemeinsame Arbeit sind eine schöne Erinnerung an unsere damalige Schulzeit. Wir möchten uns hiermit auch nochmals bei Herrn Willkomm für die Betreuung und Unterstützung in der sechsten Klasse bedanken.

Patrick studiert Informatik mit theoretischem Schwerpunkt und ist somit der Mathematik in gewisser Weise treu geblieben. Damian hat mittlerweile den Bezug zur Mathematik weitgehend verloren, allerdings zieht es ihn wieder zur Schule zurück. Er absolviert gerade ein Studium auf Lehramt in Theologie, Sport, Geschichte und Erdkunde, war aber zwischenzeitlich gar nicht ganz abgeneigt von der Idee, auch Mathe als Erweiterungsfach dazuzustudieren, bevor er sich für die anderen Fächer entschieden hat. Uns beide eint aber, dass wir uns von der Heimatregion nicht haben trennen können.

Mathematik in der Psychologie

An einem gemütlichen Grillabend mit Freunden und Verwandten wurde ich gefragt warum ein Psychologiestudium einen nicht unerheblichen Teil Mathematik beinhaltet. Viele Menschen denen ich bisher begegnet bin denken bei Psychologie sofort an „Gedankenlesen“ aber nicht an „menschliches Verhalten wissenschaftlich basiert untersuchen“.

Die Arbeit bei MadMax hat mein Interesse an Mathematik aufrechterhalten und vertieft. Um allen interessierten Lesern zu zeigen, wofür ein Psychologe Mathematik braucht möchte ich dies hier an zwei stark vereinfachten Beispielen zeigen.

1. **Beispiel**
   Mein Neffe Nicolas hat gerade eine Klassenarbeit geschrieben. Letzten Samstag zeigte er mir seine Arbeit und erzählt etwas enttäuscht „Die Mädchen sind viel schlauer in Deutsch als die Jungen. Das kannst du daran sehen, dass Sie viel bessere Noten als die Jungen bekommen haben.“
   Der Jungen/Mädchen, bzw. Männer Frauen Vergleich wird gerne von diversen Medien aufgegriffen. Psychologen versuchen nun an dieser Stelle einzusetzen und einen Beweis für die aufgestellten Behauptungen („Hypothesen“) zu suchen.
   Sehen wir uns zunächst einmal die Notenverteilung in Nicolas Klasse an. Die Klasse überraschenderweise ;-) aus genau 10 Mädchen und 10 Jungen.
   Folgende Noten gab es in der Klassenarbeit:

Name Schülerin	**Note**	**Name Schüler**	**Note**
M1	1	J1	2
M2	1	J2	2
M3	4	J3	2
M4	3	J4	3
M5	3	J5	3
M6	2	J6	2
M7	3	J7	2
M8	3	J8	6
M9	4	J9	4
M10	5	J10	6
Durchschnittsnote Mädchen	**2,9**	**Durchschnittsnote Jungen**	**3,2**

Nach der Betrachtung der Rechnung sagt Nicolas: „Siehst du: die Mädchen haben im Durchschnitt eine bessere Note bekommen als Jungen, das heißt Sie sind in dem Fach einfach besser als Jungen.“

Hier stellt sich nun die Frage ob man aus einer so kleinen Stichprobe eine generalisierende Aussage treffen kann. Ich sagte also zu meinem Neffen dass wir an einem so kleinen Unterschied und aus so einer kleinen Gruppe keine direkte Aussage induzieren können.
Hilfreich ist es an dieser Stelle einfach eine größere Gruppe Jungen und Mädchen zu untersuchen um eine besser Aussagekraft („Teststärke“ oder „Power“) der Hypothese zu erhalten:
Wir könnten versuchen 1000 Schülerinnen und Schüler aus 50 verschiedenen Schulen zu finden, damit diese Klassenarbeit schreiben um damit eine größere Aussagekraft haben zu können. Dies ist in der Praxis nur schwer möglich.
Hinzu kämen bei einem Vergleich über mehrere Klassen hinweg die Probleme anderer sogenannter „Einflussfaktoren“, wie z.B. Lehrperson, Schulform, Tageszeit (sind die Schüler morgens konzentrierter als nachmittags?), Baulärm in der Schule und andere unbekannte, nicht gemessene Faktoren, welche das Ergebnis beeinflussen können.

Eine andere Alternative wäre die Klasse meines Neffen die Klassenarbeit mehrmals schreiben zu lassen. Hier haben wir auch Einflussfaktoren wie zum Beispiel Lerneffekte („carryover –effect“)durch wiederholtes schreiben desselben Tests. Dieser Einflussfaktor wird jedoch dadurch ausgeglichen, dass er beide Gruppen (jungen wie Mädchen) gleichermaßen betrifft. Auch das ist in der Praxis nicht immer möglich.

Hier ist der Einstieg der Statistik, des wissenschaftlichen Arbeiten um Hypothesen zuerst aufzustellen und Daten zu sammeln um die Hypothese entweder zu beweisen oder zu wieder legen. Die Aufgabe von Psychologen ist nun mithilfe von mathematischen Regeln die Aussagekraft der Werte festzustellen und dadurch zu ermitteln ob der Test eine gute, mittelmäßige oder schlechte Aussagekraft hat. Er untersucht, ob die Unterschiede zwischen den Gruppen „signifikant“ sind.
Viele Psychologen in der Forschung arbeiten mit der Erhebung und Auswertung von quantitativen Daten mithilfe von Statistikprogrammen.

In der Praxis kommt es durchaus häufig vor dass man zwar nicht der Haupthypothese (im Falle meines Neffen „Mädchen sind in dem Fach besser als Jungen.“) signifikante Unterschiede feststellen kann, hingegen in manchen Teilbereichen des Tests einige Unterschiede zu finden sind: z.B. in Aufgabe 2b des Tests schneiden Mädchen durchschnittlich besser ab als Jungen; in Aufgabe 3c hingegen haben blondhaarige Schüler bessere Noten als braunhaarige - dies heißt NICHT dass die Haarfarbe in einem *direkten Einfluss* auf die Ergebnisse hat, sondern lediglich, dass es eine Verbindung („Korrelation“) zwischen beiden Faktoren bestehen kann.

Nun habe ich ein Interesse daran meinen Neffen zu beruhigen und seine Aussage zu widerlegen. Hierfür argumentiere ich folgendermaßen. „Ich kenne die Schüler M1 und J1: Sie haben eine gute Nachhilfelehrerin die mit Ihnen eventuelle Testfragen bereits vorher geübt hat. M2 und J2 kenne ich ebenfalls, die beiden Schüler haben das Jahr wiederholt und den Test bereits einmal geschrieben. Von M8, M10, J9 und J10 weiß ich dass sie: am Vorabend zu spät ins Bett gegangen sind, unkonzentriert und außerdem noch an dem Klausurtag krank waren und dadurch eine schlechtere Arbeit als sonst abgegeben haben.“ Ob ich die Schüler nun persönlich kenne oder nicht ist es wichtig einen Blick darauf zu werfen ob es Werte gibt, die das Kriterum Durchschnittsnote einer Gruppe negativ beeinflusst.

Daher bezeichnen wir die beiden besten und die beiden schlechtesten Schüler als „Ausreißer“ („outlier“). Dies sind z.B. besonders hohe und besonders niedrige Werte, welche einen Durchschnittswert beeinflussen können. Um diesem entgegen zu wirken kann man bei großen Gruppen entweder den Median in die Analyse hinzunehmen (das ist der „mittlere Wert“ - in unserem Beispiel bei den Mädchen eine 3 und bei den Jungs eine 2 bis 3, bzw. eine 2,5) um beide Gruppen miteinander vergleichen zu können oder man streicht die Outlier einfach raus. Man kann entweder alle Werte raus streichen welche nicht im Rahmen der 95%igen Standardabweichung liegen (hierzu später mehr) oder man streicht bei kleinen Gruppen einfach die höchsten und niedrigsten Werte (in unserem Beispiel sind das M1, M2 J1 und J2 für die niedrigsten Werte und M9, M10 J8 und J10 für die höchsten Werte. Anschließend rechnet man erneut die Durchschnittsnote aus:

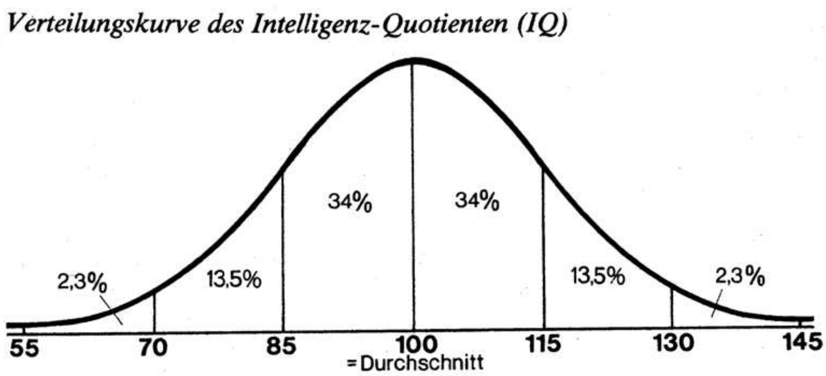
Name Schülerin	Note	Name Schüler	Note
~~M1~~	~~1~~	~~J1~~	~~2~~
~~M2~~	~~1~~	~~J2~~	~~2~~
M3	4	J3	2
M4	3	J4	3
M5	3	J5	3
M6	2	J6	2
M7	3	J7	2
M8	3	~~J8~~	~~6~~
~~M9~~	~~4~~	J9	4
~~M10~~	~~5~~	~~J10~~	~~6~~
Durchschnittsnote ohne Ausreißer	3,0	Durchschnittsnote ohne Ausreißer	2,7

Nun kann ich zu meinem Neffen sagen „Schau: Ich habe dir gezeigt dass es gar nicht so einfach ist festzustellen ob die Jungen oder die Mädchen deiner Klasse bessere Noten haben – man kann die Ergebnisse aus verschiedenen Blickpunkten betrachten und interpretieren.

In der Praxis bekommt oft eine Gruppe („Versuchsgruppe“) eine „Behandlung“, z.B. haben J1, J2, J3, J4, J5, M1, M2, M3, M4 und M5 zwei Wochen vor dem Test zwei Stunden extra Unterricht bekommen in dem Ihnen eine neuartige Lerntechnik erklärt wurde. Die anderen Schüler J6, J7, J8, J9, J10, M6, M7, M8, M9 und M10 hingegen haben 2 normale Schulstunden Mathematikunterricht bekommen. Interessierte Leser dürfen an dieser Stelle nun nachrechnen und überprüfen ob die neuartige Lerntechnik bei den Schülern ein positives, neutrales oder ein negatives Ergebnis erzielt hat.

2. **Beispiel**

Lisa ist eine Cousine von mir und arbeitet zurzeit als Lehrerin. Ihre Schule bietet für schwach- und hochbegabte Kinder ein spezielles Förderprogramm an. Auf dem letzten Elternabend hat eine Mutter behauptet Ihrem Sohn Sebastian stehe aufgrund einer festgestellten Hochintelligenz die Teilnahme an diesem Förderprogramm zu. Sie zeigt der Lehrerin das Ergebnis eines wissenschaftlich validen IQ-Tests mit einem Ergebnis von 125 Punkten. Lisa fragt mich nun ab wann man als überhaupt als hochbegabt gilt.



In der Abbildung sehen wir die Verteilung der Ergebnisse des IQ Tests. Die X-Achse gibt die erreichte Punktzahl, die Y-Achse die Anzahl der Teilnehmer an. Der Durchschnittswert entspricht in diesem Fall auch dem arithmetischen Mittel von 100 Punkten.
Nun stellt sich die Frage ab wann man sagen darf dass eine Testperson eine „eindeutig höhere“ oder „eindeutig niedrigere“ Punktzahl als der durchschnittliche Teilnehmer erreicht hat und sich dadurch deutlich „von der Masse absetzt“.
Hierfür gibt es die sogenannte „Standardabweichung“. In unserem Test beträgt diese 15. Das heißt, dass ca. 68% der Werte aller Teilnehmer in dem

Bereich zwischen 85 (=100-15) und 115 (=100+15) liegen. Im Bereich der zweifachen Standardabweichung zwischen 70 (=100-2x15) und 130 (100 +2x15) liegen etwa 95% aller Werte, im Bereich von der dreifachen Standardabweichung, zwischen 55 (100-3x15) und 145 (100+3x15) liegen rund 98% aller Werte.
Als festgelegter Wert für „eindeutig über/unter dem Durchschnitt aller Werte“ gilt bei diesem Test die zweifache Standardabweichung.
Genauer sagt dies, dass ab einem Testwert von 130 Punkten gilt man als hochbegabt und unter einem Testwert von 70 Punkt gilt man als minderbegabt. Der Schüler Sebastian gilt somit zwar als überdurchschnittlich begabt, jedoch nicht als hochbegabt.

Sebastians Freund Markus hingegen hat einen Wert von 69 erhalten. Es wäre nun ein Fehler Markus aufgrund des Testergebnisses direkt in ein Förderprogramm für kognitiv schwache Schüler zu stecken. Da Markus einen Migrationshintergrund hat wurde sein Testergebnis negativ beeinflusst. Es kann auch sein dass Markus an einer Konzentrationsstörung oder einer Lese- und Rechtschreibschwäche leidet. Dies ist nach dem Durchführen des Tests noch mal genauer zu überprüfen.

Hier entsteht nun der Übergang von der Theorie in die Praxis:

Jedem Psychologe ist bekannt, dass kein Test perfekt ist und keine Erhebungsmethode frei von Einflussfaktoren ist. Daher werden in der Diagnostik oft verschiedene Testinstrumente miteinander kombiniert um eine Aussage zu treffen. Des Weiteren werden Menschen aus dem persönlichen Umfeld der betreffenden Personen hinzugezogen. Erst nachdem man sich mit dem Fällen von Markus und Sebastian länger auseinandergesetzt hat kann bestimmt werden ob für beide Schüler die Teilnahme an dem Förderprogramm von Lisas Schule sinnvoll ist.

Gereon Lex
(Der Auto Gereon Lex studierte nach seinem Abitur an der Maastricht University (Bacherlor of Science) und University of East London (Master of Science) Psychologie. Er arbeitet heute für eine Unternehmensberatung als Personalentwickler und in einer Klinik als Verhaltenstherapeut.
mail@gereonlex.de, www.gereonlex.de).

Mathematik im täglichen Leben

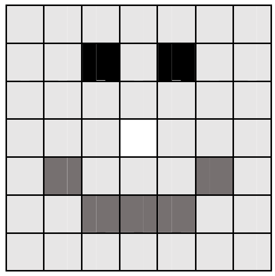
Mathematik steckt in vielen Dingen des täglichen Lebens: Zum Beispiel im Smartphone, in der Arztpraxis, in der Wettervorhersage oder in der Digitalkamera. Oftmals treten in den Naturwissenschaften und der Technik Probleme auf, bei denen eine Größe bestimmt werden soll, die man nicht direkt messen kann.

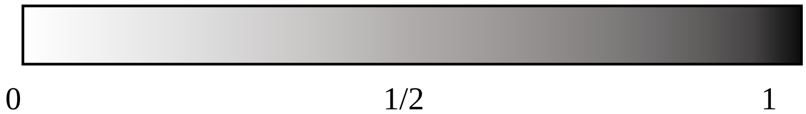
Zum Beispiel möchte ein Arzt nach einem Sportunfall abklären, ob Bänder oder Sehnen beschädigt wurden. Ein Radiologe hat in seiner Praxis viele Geräte. Dazu gehört zum Beispiel der Computertomograph. Mit diesem Gerät kann der Arztein zwei- oder sogar dreidimensionales Bild des Körperinneren erzeugen - und das natürlich ohne den Patienten zu verletzen. Dazu werden viele Röntgenbilderaus verschiedenen Winkeln erzeugt. Aus diesen wird dann ein Bild des Körperinneren des Patienten errechnet. Es entsteht ein Graustufenbild des Körperinneren, bei dem die Grauwerte den verschiedenen Gewebetypen des Körpers entsprechen. Der Arzt kann also nicht direkt in den Körper hineinschauen, sondern errechnet ein Bild des Körperinneren durch *indirekte Messungen* (durch eine Vielzahl von Röntgenbildern). In anderen Worten: Es handelt sich um ein Problem, bei dem man versucht, von der *Wirkung* (Anzahl der durch den Körper absorbierten Röntgenstrahlen) auf die *Ursache* (den Aufbau des Körperinneren) zu schließen. Solche Probleme werden *inverse Probleme* genannt.

Ein weiteres Beispiel ist die seismische Tomographie, bei der man versucht, aus Erdbebenwellen zu berechnen, wie das Innere der Erde aufgebaut ist - und die Erde kann man natürlich nicht durchschneiden. Die Temperatur in einem Hochofen ist so hoch, dass man auch diese nicht direkt messen kann. Daher kann man versuchen, von Temperaturmessungen an der Außenhülle eines Hochofens auf die Temperatur im Inneren des Ofens zu schließen. Auch das Schärfen eines unscharfen Kamerabildes ist ein inverses Problem. Hierbei versucht man, von einem unscharfen Bild auf ein scharfes Bild einer Szene zu schließen. In der folgenden Tabelle sind die Ursachen und Wirkungen der genannten Beispiele noch einmal zusammengefasst.

Beispiel	Ursache	Wirkung/Messung
Computertomographie	Röntgendichte des Körpers	Viele Röntgenaufnahmen
Seismische Tomographie	Aufbau des Inneren der Erde	Erdbebenwellen
Temperatur im Hochofen	Temperatur im Inneren	Temperatur der Außenhülle
Schärfen eines digitalen Bildes	Scharfes Bild/Szene	Unscharfes Bild

In einigen dieser Beispiele haben wir von Bildern gesprochen. Aber was ist eigentlich ein (digitales) Bild? Ein Bild einer Digitalkamera besteht aus vielen kleinen Pixeln. Das sind kleine Quadrate, die wie auf einem Rechenpapier angeordnet sind. In jedem Pixel hat das Bild einen Farbwert, zum Beispiel „weiß“. Je mehr Pixel die Kamera aufnehmen kann, desto besser wirkt das Bild. Der Einfachheit halber kannst Du Dir ein Graustufenbild vorstellen. Hier wird jedem Pixel des Bildes ein Grauwert zugeordnet, der einer Zahl zwischen 0 und 1 entspricht. „Weiß“ hat dabei den Wert 0 (vgl. die Nase im Bild) und „schwarz“ den Wert 1 (vgl. die Augen im Bild). Je dunkler der Grauton, desto näher ist der zugehörigeFarbwert an 1, vgl. den folgenden Farbstrahl.





Typischerweise ist es schwierig, aus Messungen (Wirkung) auf die Ursache des Messergebnisses zu schließen, insbesondere wenn die Messungen Messfehler enthalten. Da bei Messungen in der Praxis immer Messfehler auftreten, muss man hier besondere Rechenmethoden anwenden. Tut man dies nicht, so können im schlimmsten Fall beliebig kleine Messfehler zu sehr großen Fehlern im Ergebnis führen. Bei unserem unscharfen Graustufenbild heißt das, dass das berechnete Bild unter Umständen mit der fotografierten Szene nicht viel gemeinsam hat. In der Computertomographie bedeutet das, dass das berechnete Bild des Körperinneren nicht dem tatsächlichen Körperinneren des Patienten entspricht.

Aufgrund der in den Messungen enthaltenen Messfehler kann man nicht erwarten, das Problem exakt lösen zu können. Man versucht aber eine Lösung zu finden, die möglichst gut die Realität annähert. Aus diesem Grund muss man Zusatzannahmen, die man an die unbekannte Lösung stellt, mit in den Lösungsprozess einfließen lassen. Eine solche Zusatzannahmen könnte zum Beispiel sein, dass sich das Bild nur in wenigen Pixeln von einem Grauwert unterscheidet, wie obiges Beispiel. Beachtet man solche Zusatzannahmen, ist es möglich, auch schwierige Probleme mit Hilfe eines Computers näherungsweise zu lösen.

Autorin: Esther Hans, 14.10.2017