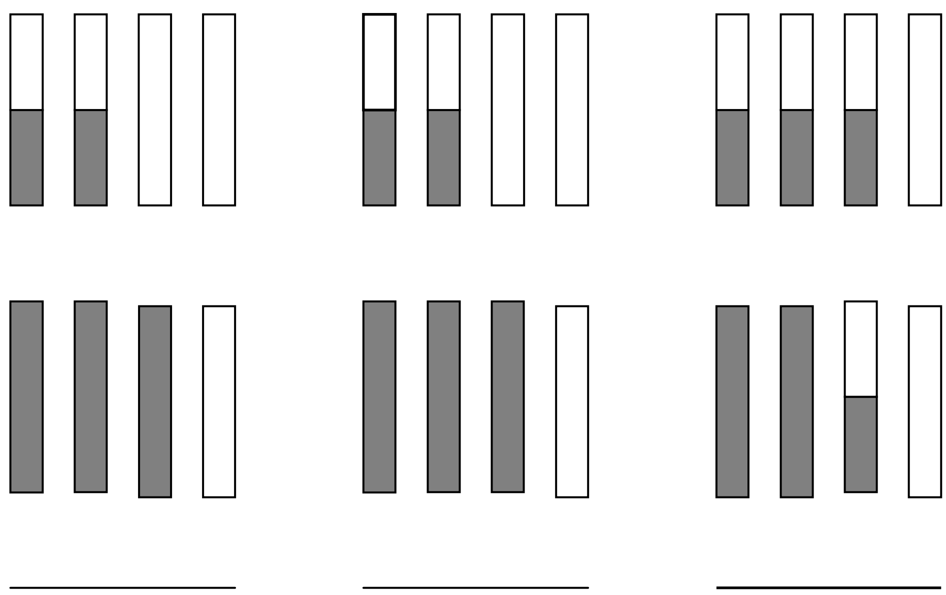
the MadMax



zeitung für mathematik am mpg trier / heft 39 / januar 2017

Liebe MadMax – Freunde,

dieses Mal haben wir zwei Themen aus der letzten Ausgabe weiter bearbeitet und neue Ergebnisse erzielt. Außerdem haben Axel, Jonathan und Kai ein neues Thema untersucht, bei dem ein Kellner Gläser möglichst gleich auf drei Tabletts verteilen soll.

Alle drei Arbeiten nehmen am Wettbewerb „Schüler experimentieren“ teil.

Viel Spaß beim Lesen und Mitdenken

Euer MadMax –Team

Alle gleich schwer – wie verteilt man Gläser auf mehrere Tabletts?

1. Unser Startproblem

Ein Kellner soll 24 Gläser auf 3 Tabletts verteilen. Acht Gläser sind voll, acht halbvoll und acht sind leer. Wie kann er das machen, wenn man zwei Bedingungen stellt:

1. Auf jedem Tablett müssen acht Gläser stehen.
2. Alle Tabletts müssen gleich schwer sein.

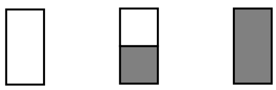
Wir wollen untersuchen, wie das geht und ob es vielleicht mehrere Möglichkeiten gibt.

Weitere Fragen: Geht es auch mit einer anderen Anzahl an Gläsern? Oder mit einer anderen Anzahl an Tabletts? Wie geht es mit anderen Füllregeln?

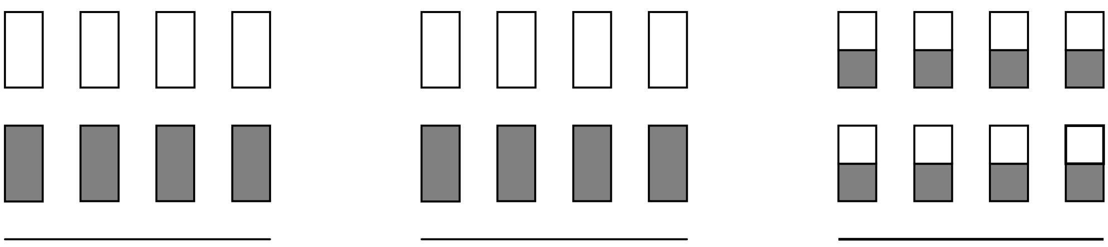
Die Idee stammt aus dem Probewettbewerb Mathematik ohne Grenzen 2016.

2. Wir lösen das Startproblem

Dazu zeichnen wir leere, halbvolle und volle Gläser wie im nächsten Bild:

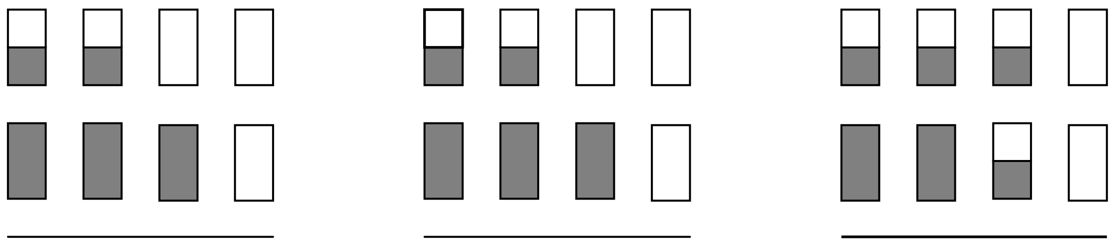


Weil die Gläser ein Gewicht haben, das wir nicht kennen, muss der Kellner auf jedes Tablett gleich viele Gläser stellen, also acht. Dann haben wir eine einfache Lösung gefunden.



Summe: 4 Summe: 4 Summe: 4

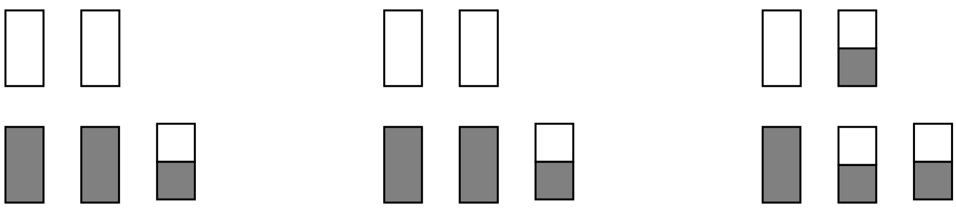
Man kann die Gläser aber auch anders mischen. Zum Beispiel:



3. Wir ändern die Anzahl der Gläser

Jetzt soll der Kellner eine andere Anzahl von Gläsern auf die Tabletts stellen. Es sollen aber immer gleich viele von jeder Sorte sein.
Mit einem Glas von jeder Sorte geht es nicht, weil wir nur drei unterschiedlich gefüllte Gläser haben. Deswegen wäre eine unterschiedliche Füllung der Gläser auf jedem Tablett. Mit zwei Gläsern von jeder Sorte ist es einfach: auf die ersten beiden Tabletts müssen ein volles und ein leeres Glas. Auf das dritte Tablett kommen die zwei halbvollen Gläser.

Nun nehmen wir fünf Gläser von jeder Art:



Hier muss auch auf das dritte Tablett ein volles Glas und auf jedes der Tabletts muss am Ende noch ein halbvolles.

Um nicht soviel zeichnen zu müssen, beschreiben wir die Tabletts ab jetzt mit Termen:

1. und 2. Tablett: $2 \cdot (1+0) + 1 \cdot \frac{1}{2}$

3. Tablett: $1 \cdot (1+0) + 3 \cdot \frac{1}{2}$

4. Gibt es ein Prinzip, wie der Kellner die Tabletts füllen soll?

Bisher haben wir das Kellnerproblem immer durch Probieren gelöst. Dabei ist uns aufgefallen, dass man mit zwei Prinzipen arbeiten kann.

4.1 Gerade Anzahl

Wenn die Anzahl jeder Art Gläser (leer, halbvoll, voll) gerade ist, dann kann man das „Prinzip der 2“ anwenden: Als erstes muss man zählen, wie oft die zwei in die Anzahl der Gläser passt. Wenn man zum Beispiel acht von jeder Sorte hat, dann kann man das Prinzip der 2 vier mal anwenden. Das heißt, man stellt viermal ein volles und ein leeres Glas auf das erste Tablett. Auf das zweite auch und auf das dritte kommen alle halbvollen Gläser.

Term für das 1. und 2. Tablett: $4 \cdot (1+0)$

Term für das 3. Tablett: $8 \cdot \frac{1}{2}$

Term für alle Tabletts zusammen: $4 \cdot (1+0) + 4 \cdot (1+0) + 8 \cdot \frac{1}{2}$.

Bei einer größeren Zahl wie z.B. 48 Gläser von jeder Sorte geht das dann so:

Term für alle Tabletts zusammen: $24 \cdot (1+0) + 24 \cdot (1+0) + 48 \cdot \frac{1}{2}$

4.2 Ungerade Anzahl

Wenn die Anzahl der Art der Gläser ungerade ist, dann muss man zusätzlich das Prinzip der 3 anwenden. Nehmen wir zum Beispiel an, dass von jeder Sorte 9 Gläser da sind. Wir rechnen 9 : 3 = 3 und wenden das Prinzip der 3 dreimal an. Das heißt wir machen auf jedes Tablett 3 Gläser jeder Art, denn das Prinzip der Drei bedeutet, dass wir auf jedes Tablett ein Glas jeder Art draufmachen.

Term für jedes der drei Tabletts: $3 \cdot (1 + \frac{1}{2} + 0)$

Wenn die Zahl nicht durch 3 teilbar ist wie zum Beispiel bei 47 Gläsern von jeder Sorte, dann müssen wir das Prinzip der 2 und der 3 anwenden.
Am Anfang müssen wir die Zahl minus 3 rechnen.
Also: 47 – 3 = 44.
Jetzt haben wir eine Zahl, die durch 2 teilbar ist: 44.
Jetzt rechnen wir die Zahl durch 2: 44 : 2 = 22.
Wir wissen jetzt, dass wir 22 mal das Prinzip der 2 anwenden müssen und für die 3 einmal das Prinzip der 3.

Term für 1. und 2. Tablett: $22 \cdot (1+0) + 1 \cdot (1 + \frac{1}{2} + 0)$

Term für das 3. Tablett: $44 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (1 + \frac{1}{2} + 0)$

Man könnte statt der 3 auch eine andere durch drei teilbare Zahl subtrahieren, z.B. 47 – 15 = 32 und dann 16 mal das Prinzip der 2 und 5 mal das Prinzip der 3 anwenden.

Also für 1. und 2.Tablett: $16 \cdot (1+0) + 5 \cdot (1 + \frac{1}{2} + 0)$

3. Tablett: $16 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot (1 + \frac{1}{2} + 0)$

Damit ist das Problem für jede Anzahl von Gläsern von jeder Sorte gelöst.

5. Wir ändern die Anzahl der Tabletts

5.1 Der Kellner soll die Gläser nur auf zwei Tabletts stellen

In diesem Fall liegt kein Problem vor, weil man bei jeder geraden Anzahl von Glassorten auf jedes Tablett ein volles, ein halbvolles und ein leeres Glas hinstellen kann. Dieses Prinzip kann man beliebig multiplizieren.

1.Tablett	2.Tablett
$(1 + \frac{1}{2} + 0)$	$(1 + \frac{1}{2} + 0)$

Am Ende steht dann auf jedem Tablett die Hälfte der vollen, der halbvollen und der leeren Gläser.

Eine ungerade Zahl von jeder Sorte geht nie, weil immer ein Glas übrigbleiben würde und dadurch ein Ungleichgewicht entstehen würde.

5.2 Wie geht es mit vier Tabletts

Bei vier Tabletts gibt es zwei Bedingungen:

1. Gleich viele Gläser auf jedem Tablett: Deshalb muss die Anzahl aller Gläser durch vier teilbar sein.
2. Gleich viele Gläser von jeder Sorte: Weil es drei Sorten gibt, muss die Anzahl aller Gläser durch drei teilbar sein.

Deshalb muss die Gesamtzahl durch 12 teilbar sein.

Beispiel: 12 Gläser insgesamt.

Dann kann der Kellner das 1., 2., 3. und 4. Tablett gleich bestücken: $4 \cdot (1 + \frac{1}{2} + 0)$

Bei 24 Gläsern muss man das Beispiel verdoppeln, bei 36 Gläsern muss man das Beispiel verdreifachen usw.

6. Wir ändern die Füllung der Gläser

Der Kellner hat jetzt drei Sorten Gläser: leer, 1/3 gefüllt, 2/3 gefüllt und voll.

6.1 Der Kellner soll die Gläser nur auf zwei Tabletts stellen

Wenn der Kellner 1 Glas von jeder Sorte hat, gibt es folgende einfache Lösung:

Tablett 1: $(1 + 0)$ Tablett 2: $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})$

Bei mehreren Gläsern pro Sorte (z.B.7) kann er es so machen:

$$7 \cdot (1 + 0) + 7 \cdot (\frac{2}{3} + \frac{1}{3})$$

6.2 Der Kellner soll die Gläser nun auf vier Tabletts stellen

Auch das geht einfach, wenn die Anzahl der Gläser von jeder Sorte durch 2 teilbar ist.

In diesem Fall haben wir für x Gläser von jeder Sorte diese Terme gefunden:

Tablett 1 und 2: $(x : 2) \cdot (\frac{2}{3} + \frac{1}{3})$

Tablett 3 und 4: $(x : 2) \cdot (1 + 0)$

Bei ungeraden Zahlen ist dieser Vorgang nicht möglich.

6.3 Der Kellner soll die Gläser auf drei Tabletts stellen

Weil diese Aufgabe etwas schwieriger ist, hatten wir noch nicht ausreichend Zeit, sie zu bearbeiten. Dies wollen wir bis zum nächsten MadMax nachholen.

Die Summe mit dem größten Produkt

(Fortsetzung der Untersuchungen aus MadMax 38)

1. Darum ging es beim letzten Mal

Die Zahl 22 lässt sich auf verschiedene Arten als Summe natürlicher Zahlen schreiben. Wenn man die Summanden miteinander multipliziert, dann erhält man verschieden große Produkte (Die Idee stammt aus dem Probewettbewerb Mathematik ohne Grenzen 2016).

Beispiel: $22 = 7 + 1 + 2 + 12$ ergibt $7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 12 = 168$

$22 = 6 + 6 + 10$ ergibt $6 \cdot 6 \cdot 10 = 360$

Für welche Darstellung ergibt sich das größte Produkt?

2. Das hatten wir schon herausgefunden

Bessere Lösungen könnte es natürlich noch mit mehr oder weniger Summanden geben. Das untersuchen wir jetzt systematisch.

Die beste Lösungen mit 2 bis 5 Summanden sind $11 \cdot 11 = 121$, $7 \cdot 7 \cdot 8 = 392$, $5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 900$ und $22 = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$=1600
Die beste Lösung mit 6 Summanden wäre:
$22 = 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3$ ergibt $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$=2304
Die beste Lösung mit 7 Summanden wäre:
$22 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4$ ergibt $22 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4$=2916
Die beste Lösung mit 8 Summanden wäre:
$22 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2$ ergibt $22 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2916$
Die beste Lösung mit 9 Summanden wäre:
$22 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3$ ergibt $22 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2592$

Die besten Lösungen sind also die mit 7 und 8 Summanden.

3. Zwei wichtige Ergebnisse

Bisher haben wir zwei wichtige Ergebnisse:

(1) Am besten scheint es zu sein, wenn die Summanden gleich groß sind oder sich nur um 1 unterscheiden.
(2) Bei der Zahl 22 sind 7 und 8 Summanden am besten.

Beide Ergebnisse nehmen wir nun genauer unter die Lupe.

3.1 Sollen die Summanden wirklich immer nahe beieinander liegen?

Beispiel: Summe 10

1.Zahl	2. Zahl	Summe	Produkt
1	9	10	9
2	8	10	16
3	7	10	21
4	6	10	24
5	5	10	25

Beispiel: Summe 15

1.Zahl	2. Zahl	Summe	Produkt
3	12	15	36
4	11	15	44
5	10	15	50
6	9	15	54
7	8	15	56

Bei beiden Zahlen kann man sehen, wenn die Summanden nah bei einander liegen, dann kommt ein größeres Produkt heraus, wenn man sie miteinander multipliziert.

Ist das auch bei drei Summanden so?

Beispiel: Summe 15

1.Zahl	2. Zahl	3. Zahl	Summe	Produkt
3	6	6	15	108
3	5	7	15	105
4	4	7	15	112
4	5	6	15	120
5	5	5	15	125

Beispiel: Summe 20

1.Zahl	2. Zahl	3. Zahl	Summe	Produkt
4	6	10	20	240
4	8	8	20	256
5	7	8	20	280
6	6	8	20	288
7	7	6	20	294

Beispiel: Summe 20

1.Zahl	2. Zahl	3. Zahl	4.Zahl	Summe	Produkt
3	2	5	10	20	300
3	6	6	5	20	540
4	6	6	4	20	576
5	5	6	4	20	600
5	5	5	5	20	625

Bei allen Beispielen ist es also gut, wenn die Summanden nahe beieinander liegen. Deshalb überlegen wir uns jetzt, wie man z.B. bei der Zahl 46 zwei, drei, vier oder fünf möglichst nah beieinander liegende Faktoren findet.

Dazu brauchen wir eine Grundzahl und ein paar mal die Grundzahl +1. Bei der 46 ist bei 2 Faktoren die Grundzahl 46 : 2 =23 und das Produkt dann 23*23=529.
Bei 3 Summanden ist 46 : 3 = 15,3333 …. Deshalb ist die Grundzahl 15 und die Grundzahl + 1 ist 16. Das Produkt ist dann 15*15*16=3600.

Weiter:

Bei 4 Summanden gilt: 46 : 4 = 11,5. Deshalb ist die Grundzahl 11 und die muss man zweimal verwenden und die 12 auch: 11*11*12*12=17424
Bei 5 Summanden gilt: 46 : 5 = 9,2. Deshalb ist die Grundzahl 9 und die muss man viermal verwenden und die 10 auch: 9*9*9*9*10=65610

Bei 371 sieht das so aus:
2 Summanden: 371 : 2 = 185,5 und 185*186 ist das Produkt.
3 Summanden: 371 : 3 = 123,66 und 123*124*124.
4 Summanden: 371 : 4 = 92,75 und 93*93*93*92.
9 Summanden: 371 : 9 = 41,22 und 41*41*41*41*41*41*41*42*42.

Allgemein: wenn man x Faktoren haben will, muss man die Zahl durch x teilen und abrunden für die Grundzahl und 1 addieren für Grundzahl + 1.

Bei 3 Summanden muss man so oft die 123 nehmen bis sie nicht mehr reinpasst. Dann muss man den Rest 2 zu zwei 123ern dazu zählen.

Bei vier Summanden muss man sogar dreimal 92 + 1 rechnen.

3.2 Wie findet man für beliebige Zahlen die optimale Anzahl an Summanden

Zahl	Zahl der Summanden	Zahl/3
2	2	0,7
4	2	1,3
6	2	2,0
8	3	2,7
10	3 oder 4	3,3
15	5	5,0
20	7	6,7
22	7 oder 8	7,3
25	8 oder 9	8,3
30	10	10,0
35	12	11,7
40	13 oder 14	13,3

In der Tabelle haben wir bemerkt, dass die Zahl der Summanden immer ungefähr ein Drittel so groß ist wie die Zahl um das größte Produkt zu erhalten. Wir haben in EXCEL ausprobiert, ob das auch bei größeren Zahlen geht, zum Beispiel bei der Zahl 80.

Nach unserer Vermutung brauchen wir ungefähr 27 Summanden (80 : 3 = 26,66…). Dann ist 80 = 26 *3 + 1*2 und als Produkt erhält man 5,08 mal 1 000 000 000 000, also ungefähr 5 Billionen.

Bei 26 und 27 Summanden erhält man nur 4,5 Billionen.

Wir haben also zwei wichtige Ergebnisse:

1. Um das größte Produkt zu erhalten, dürfen sich die Summanden um höchstens 1 unterscheiden.

2. Um das größte Produkt zu erhalten, muss die Zahl der Faktoren ungefähr ein Drittel der Zahl sein.

Nur eine Zahl bleibt übrig, aber welche?

1. Streichen und ersetzen

Die Idee für unsere Arbeit stammt aus dem Probewettbewerb Mathematik ohne Grenzen 2016 und Zoe Harder und Anna Catharina Zanoth, zwei Schülerinnen aus unserer Mathe-AG, hatten sich im letzten MadMax schon damit beschäftigt. Sie haben die Zahlen von 1 bis 10 aufgeschrieben. Dann haben sie zwei Zahlen durchgestrichen und sie durch ihre Summe minus 1 ersetzen. Das haben sie dann solange weiter gemacht, bis nur noch eine Zahl übrig war.

Beispiel 1:

~~1~~ ~~2~~ 3 4 5 6 7 8 9 10

~~3~~ ~~4~~ 5 6 7 8 9 10 2

~~5~~ ~~6~~ 7 8 9 10 2 6

~~7~~ ~~8~~ 9 10 2 6 10

~~9~~ ~~10~~ 2 6 10 14

~~2~~ ~~6~~ 10 14 18

~~10~~ ~~14~~ 18 7

~~18~~ ~~7~~ 23

~~23~~ ~~24~~

46

Als letzte Zahl kam 46 raus. Dann haben sie die Zahlen in einer anderen Reihenfolge gestrichen, um zu sehen, bei welchem Ergebnis sie dann landen und es kam wieder 46 raus. Das wollten wir genauer untersuchen.

2. Wir wählen eine andere Anzahl von Startzahlen

Wir sollten jetzt untersuchen, wie es ist, wenn man nicht mit 10 Zahlen beginnt, sondern mit einer anderen Anzahl.

Mit einer Zahl kann man nicht anfangen, weil man nicht zwei streichen kann.

Wenn man nur 1 und 2 hat dann streicht man beide und herauskommt 2 und man ist fertig.

Bei drei Zahlen geht es so:

~~1~~ ~~2~~ 3

~~3~~ ~~2~~

4

Die letzte Zahl war 4. Danach haben wir wieder von 1 – 3 gemacht, aber haben die Zahlen durcheinander gestrichen. Auch dann kam wieder 4 heraus.

Wichtiges Ergebnis:

Die Reihenfolge, wie man die Zahlen streicht, ist egal. Denn es kommt immer die gleiche Endzahl raus. Welche das ist, haben wir für mehrere Startzahlen ausprobiert.

Tabelle:

Anzahl der Zahlen:	Endzahl:	Zeilensumme
1	Geht nicht	Geht nicht
2	2	4
3	4	7
4	7	11
5	11	**16**
6	**16**	22
7	22	29
8	29	37
9	37	46
10	46	56

In der Tabelle ist uns aufgefallen, wenn man beide Zahlen in einer Zeile addiert, kommt die nächste Endzahl raus. Beispiel: 2 + 2 = 4 oder 5 + 11 = 16. Wenn man die Endzahl für zum Beispiel 20 heraus kriegen will, muss man zuerst eine Tabelle mit 20 Zeilen erstellen. Das Problem ist hier, dass man für große Zahlen eine große Tabelle machen muss.

3. Vorhersage für beliebig viele Zahlen

Weil auch das mit dem Streichen solange dauert, haben wir uns überlegt, ob wir die Endzahl nicht ohne zeichnen und ohne große Tabelle finden können. Am einfachsten kann man das mit drei Zahlen erklären: 1 + 2 wäre 3, dann noch + 3 wäre 6 als Endzahl, aber warum kommt 4 raus? Antwort: man hat nach dem streichen zweimal minus 1 gerechnet.

Bei 4 Zahlen ist die Summe der vier Zahlen 10, also ist die Endzahl 7, weil man 3 mal streicht. Bei 5 Zahlen ist die Summe 15 also ist die Endzahl 11, weil man 4 mal streicht usw..

Bei 20 Zahlen muss man 19 mal streichen und wir müssten dann noch die Summe ausrechnen: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20=210.

Auch das dauert lange, aber es gibt einen Trick.

Unser Lehrer hat uns eine Formel von dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß gegeben: $1+2+3+...+n = n \cdot (n+1) : 2$.

Beispiel: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20 = 20*21:2 = 420 : 2 = 210.

Beispiel: Was kommt bei 50 Startzahlen raus?

Zuerst rechnet man die Summe aus: 1+2+3….49+50 = 50*51:2 = 1275. Danach subtrahiert man 49, weil man 49 mal gestrichen hat und dann ist die Endzahl 1275 – 49 = 1226.

4. Ersetzen durch Summe minus 2

Jetzt haben wir uns überlegt, was am Ende rauskommt, wenn man nach jedem streichen immer minus 2 rechnet.

Dann muss man genauso die Summe ausrechnen und für jedes streichen minus 2 rechnen. Zum Beispiel: 1+2+3….49+50 = 50*51 = 1275. Danach subtrahiert man 98, weil man jetzt 49 mal minus 2 rechnet. Denn 2*49 sind 98. Also rechnet man jetzt 1275 – 98 = 1177.

Bei minus 3 oder minus 5 muss man am Ende 3*49 oder 5*49 subtrahieren.

5. Drei Zahlen ersetzen

Zum Schluss haben wir uns noch überlegt, was passiert, wenn man immer drei Zahlen streicht und sie addiert und 1 subtrahiert.

Bei 1 und 2 geht es nicht weil man nur 2 streichen kann. Wir haben festgestellt, dass es bei geraden Zahlen nicht geht, weil am Ende immer nur zwei übrig bleiben.

Bei drei Zahlen kommt am Ende 1 + 2 + 3 – 1 = 5 raus.

Bei 5 Zahlen geht es so:

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 5

~~4~~ ~~5~~ ~~5~~

13

Am Ende kommt 13 raus.

Wir haben das bis zur 11 gemacht und alle Ergebnisse in eine Tabelle geschrieben:

Anzahl der Zahlen:	Endzahl:
1	Geht nicht
3	5
5	13
7	**25**
9	41
11	61

Dabei ist uns aufgefallen, dass man das Endergebnis für eine Zahl rauskriegt, wenn man die Zahl und die beiden Zahlen darüber addiert. Das ist etwas komplizierter als wenn man nur zwei Zahlen streicht.