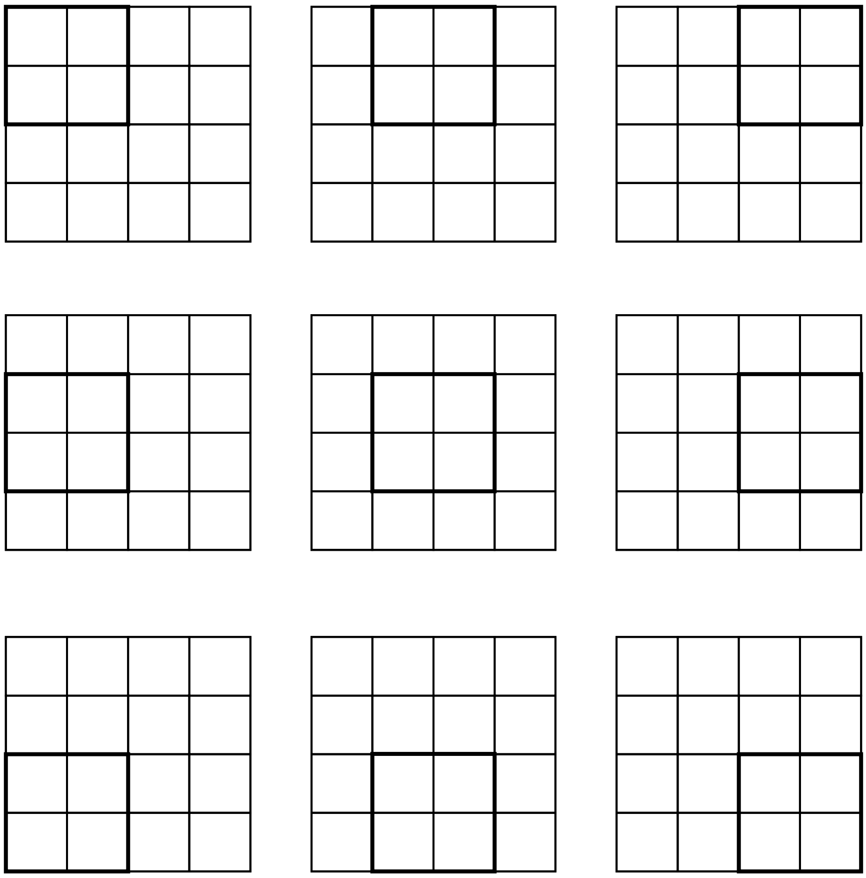
the MadMax



zeitung für mathematik am mpg trier / heft 38 / juli 2016

Inhaltsverzeichnis		**Seite**

Liebe MadMax – Freunde,

auch diesmal war unser Team wieder etwas kleiner, aber wir haben trotzdem vier Themen bearbeitet. Weil die meisten von uns noch in der 5. oder 6. Klasse sind, ist die Mathematik auch für Orientierungsstufenschülerinnen und –schüler gut zu verstehen. Spannend ist auch das Thema von Moritz und Felix aus der Klasse 9, bei dem die Entwicklung einer abstrakten Stadt untersucht wird. In allen vier Beiträgen gibt es auch viele Zeichnungen und Tabellen, die das Verstehen zusätzlich erleichtern.

Viel Spaß beim Lesen und Mitdenken

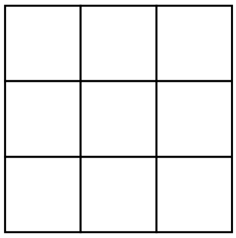
Euer MadMax –Team

Mehr als man glaubt – versteckte Figuren

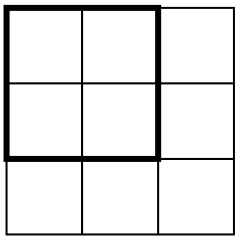
1. Quadrate in Quadraten

1.1 Das wollte unser Lehrer wissen

In unserer AG wurden wir gefragt aus wie vielen Quadraten diese Figur besteht.



Erst wurde neun gesagt, weil nur die inneren Quadrate gezählt wurden. Dann zehn, weil auch das äußere erkannt wurde. Am Ende waren es doch 14, denn das unten markierte 2 x 2 Quadrat gibt es auch noch vier mal in der Figur.

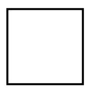


Also gibt es 1 großes Quadrat, 4 mittlere und 9 kleine Quadrate in der Figur und damit insgesamt 1 + 4 + 9 = 14 Quadrate.

1.2 Das wollen wir allgemein untersuchen

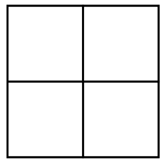
Wir wollen jetzt beliebige n x n Quadrate systematisch untersuchen und Regeln finden.

1 x 1 – Quadrat:



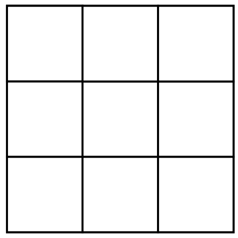
Hier kann es nur ein Quadrat sein, weil nur eins da ist.

2 x 2 – Quadrat:



Hier sind es 5 Quadrate, ein großes und vier kleine: 1 + 4 = 5.

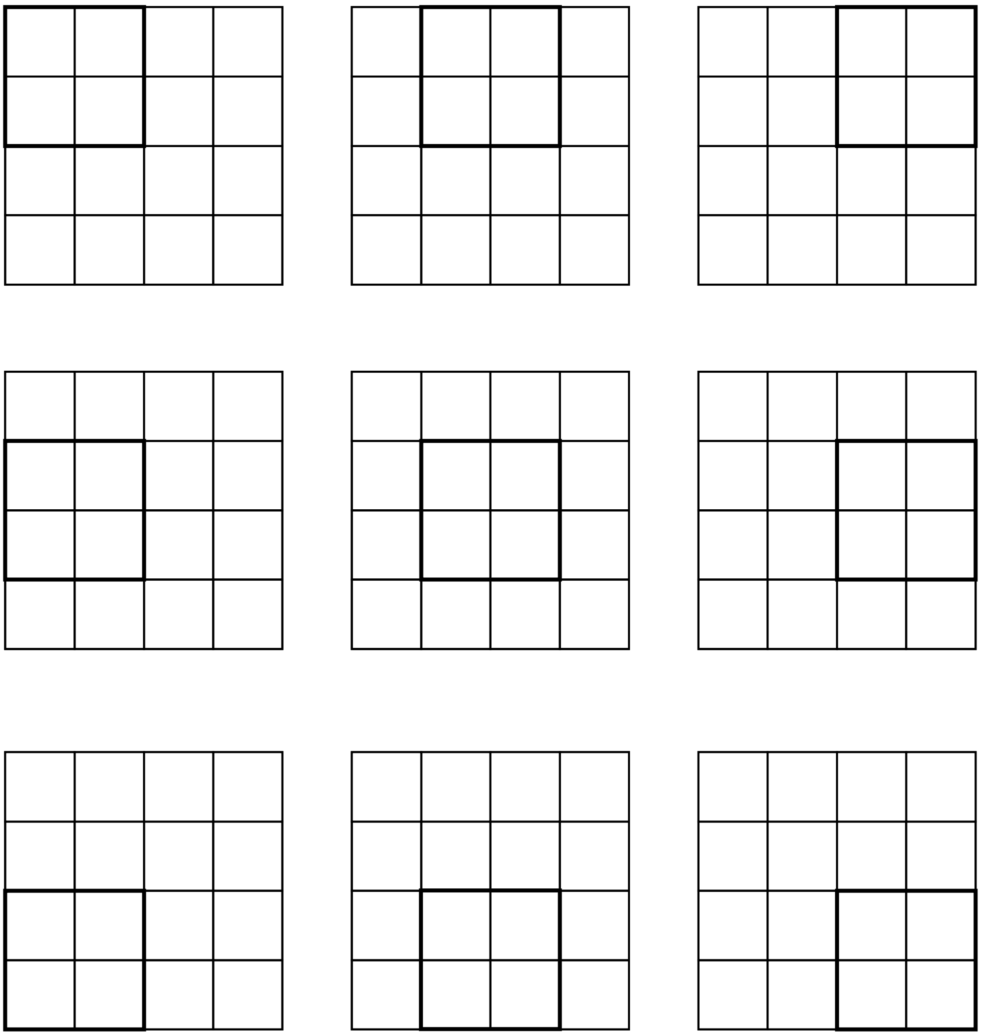
3 x 3 – Quadrat:



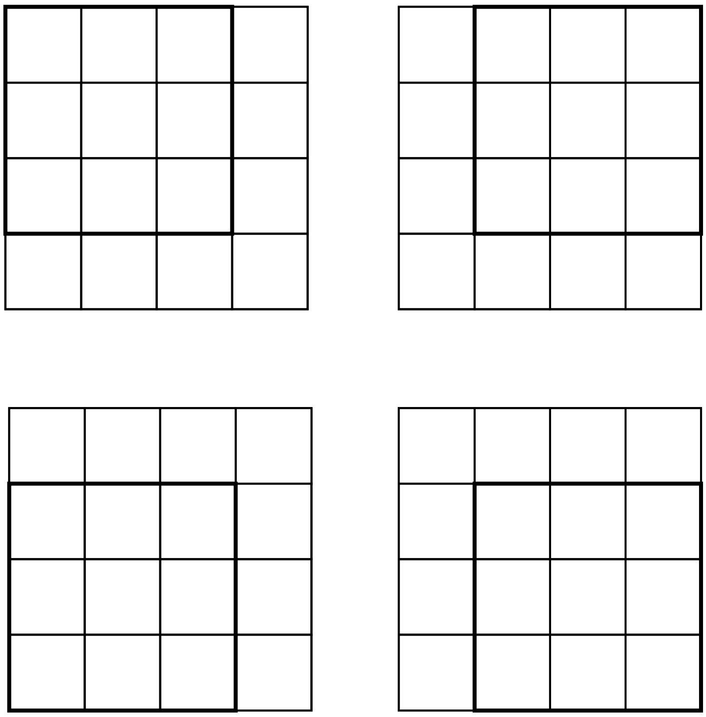
Wie man in 1.1 sehen kann, sind es hier
insgesamt 14 Quadrate.

4x4 Quadrat:

Hier gibt es 4 x 4 = 16 kleine Quadrate und ein großes. Außerdem kann man das fett markierte 2 x 2 Quadrat an 3 x 3 = 9 verschiedenen Stellen finden.



Außerdem gibt es noch vier 3 x 3 Quadrate:



Insgesamt sind es also 30 Quadrate: innen 16 ganz kleine Quadrate, dann 9 mittelgroße 2 x 2 Quadrate, 4 größere 3 x 3 Quadrate und außen 1 großes 4 x 4 Quadrat .

Kurz: 1 + 4 + 9 + 16 = 30.

Mir ist aufgefallen, dass es immer Quadratzahlen sind (1, 4, 9, 16) und bei einem größeren Quadrat kommt immer die nächste Quadratzahl dazu.

Deshalb hatte ich eine Vermutung: Bei einem 5 x 5 Quadrat müssten es 55 Quadrate sein, weil 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55 ist.

Begründung:

Es gibt 25 Plätze für die kleinen Quadrate.
Ein 2 x 2 Quadrat kann man ganz oben an vier verschiedene Stellen schieben und in vier verschiedene Höhen. Also gibt es 4 x 4 = 16 Zweierquadrate.
Ein 3 x 3 Quadrat kann man ganz oben an drei verschiedene Stellen schieben und in drei verschiedene Höhen. Also gibt es 3 x 3 = 9 Dreierquadrate.
Ein 4 x 4 Quadrat kann man ganz oben an zwei verschiedene Stellen schieben und in zwei verschiedene Höhen. Also gibt es 2 x 2 = 4 Viererquadrate.
Ein 5 x 5 Quadrat gibt es nur einmal geben, weil das außen herum ist.

Diese Idee werde ich noch genauer untersuchen.

Nur eine Zahl bleibt übrig, aber welche?

Für unser Problem sollten wir zuerst die Zahlen von 1 bis 10 aufschreiben. Dann sollten wir zwei Zahlen durchstreichen und sie durch ihre Summe minus 1 ersetzen. Das sollten wir dann solange machen, bis nur noch eine Zahl übrig ist. Die Idee stammt aus dem Probewettbewerb Mathematik ohne Grenzen 2016.

Beispiel:

~~1~~ ~~2~~ 3 4 5 6 7 8 9 10
~~3~~ ~~4~~ 5 6 7 8 9 10 2
~~5~~ ~~6~~ 7 8 9 10 2 6
~~7~~ ~~8~~ 9 10 2 6 10
~~9~~ ~~10~~ 2 6 10 14
~~2~~ ~~6~~ 10 14 18
~~10~~ ~~14~~ 18 7
~~18~~ ~~7~~ 23
~~23~~ ~~24~~
46

Als letzte Zahl kommt 46 raus.

Was passiert, wenn man die Zahlen in einer anderen Reihenfolge streicht?

Das machen wir jetzt, um zu sehen, bei welchem Ergebnis wir dann landen:

1 2 ~~3~~ 4 5 6 ~~7~~ 8 9 10

1 ~~2~~ 4 5 6 ~~8~~ 9 10 9

~~1~~ 4 5 6 9 ~~10~~ 9 9

~~4~~ 5 6 ~~9~~ 9 9 10

~~5~~ ~~6~~ 9 9 10 12

~~9~~ ~~9~~ 10 12 10

~~10~~ 12 10 ~~17~~

~~12~~ ~~10~~ 26

~~26~~ ~~21~~

46

Wir landen wieder bei der 46!

Ist das Zufall oder kommt immer die gleiche Zahl raus? Wir haben vermutet, dass es immer auf das gleiche Ergebnis rausläuft.

Begründung:

Wenn man alle Zahlen von 1 bis 10 zusammenrechnet, dann erhält man 55. Bis man bei der letzten Zahl ankommt, muss man neun Streichungen machen. Da man mit jeder Streichung eins verliert, rechnet man am Ende 55 – 9 und dann kommt das Ergebnis 46 heraus. Dies ist, egal in welcher Reihenfolge man die Zahlen streicht, immer das Endergebnis der letzten beiden Zahlen.

So ähnlich müsste es dann auch bei mehr Zahlen sein. Wir untersuchen deshalb jetzt die Zahlen von 1 bis 20:

1 2 3 4 ~~5~~ 6 7 8 9 10 ~~11~~ 12 13 14 15 16 17 18 19 20

1 2 3 4 6 ~~7~~ 8 9 10 12 13 14 15 ~~16~~ 17 18 19 20 15

1 2 3 4 6 ~~8~~ 9 10 12 13 14 15 17 ~~18~~ 19 20 15 22

~~1~~ 2 3 4 6 9 10 ~~12~~ 13 14 15 17 19 20 15 22 25

2 3 4 ~~6~~ 9 10 ~~13~~ 14 15 17 19 20 15 22 25 12

2 3 4 ~~9~~ 10 14 ~~15~~ 17 19 20 15 22 25 12 18

2 3 ~~4~~ 10 14 17 19 ~~20~~ 15 22 25 12 18 23

2 ~~3~~ 10 14 17 ~~19~~ 15 22 25 12 18 23 23

2 ~~10~~ 14 ~~17~~ 15 22 25 12 18 23 23 21

~~2~~ ~~14~~ 15 22 25 12 18 23 23 21 26

~~15~~ ~~22~~ 25 12 18 23 23 21 26 15

~~25~~ ~~12~~ 18 23 23 21 26 15 36

~~18~~ ~~23~~ 23 21 26 15 36 36

~~23~~ ~~21~~ 26 15 36 36 40

~~26~~ ~~15~~ 36 36 40 43

~~36~~ ~~36~~ 40 43 40

~~40~~ ~~43~~ 40 71

~~40~~ ~~71~~ 82

~~82~~ ~~110~~

191

Jetzt ist 191 unsere letzte Zahl, weil die Summe der ersten 20 Zahlen 210 ist und wir 19 Streichungen machen mussten, weil wir ja bei jeder Streichung eine Zahl weniger bekommen und eine 1 subtrahieren.

Die Summe mit dem größten Produkt

1. Ein Problem mit der Zahl 22

„Die Zahl 22 lässt sich auf verschiedene Arten als Summe natürlicher zahlen darstellen. Für jede dieser Darstellungen wird das Produkt der Summanden Berechnet.

Beispiel: $22 = 7 + 1 + 2 + 12$ ergibt $7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 12 = 168$
$22 = 6 + 6 + 10$ ergibt $6 \cdot 6 \cdot 10 = 360$

Für welche Darstellung ergibt sich das größte Produkt?“

Wir haben ein paar eigene Beispiele ausprobiert:

$22 = 6 + 2 + 5 + 9$ ergibt $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9 = 540$

$22 = 5 + 4 + 6 + 7$ ergibt $5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 = 840$

$22 = 5 + 5 + 5 + 7$ ergibt $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 875$

Die Ergebnisse werden immer größer, weil die Summanden immer näher beieinander liegen.

Die beste Lösung mit 4 Summanden wäre dann:

$22 = 5 + 5 + 6 + 6$ ergibt $5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 900$

Näher beieinander können die Summanden nicht sein.

2. Systematische Untersuchung der Zahl 22

Bessere Lösungen könnte es natürlich noch mit mehr oder weniger Summanden geben. Das untersuchen wir jetzt systematisch.

Die beste Lösungen mit 2 bis 5 Summanden sind $11 \cdot 11 = 121$, $7 \cdot 7 \cdot 8 = 392$, $5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 900$ und $22 = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ =1600

Die beste Lösung mit 6 Summanden wäre:

$22 = 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3$ ergibt $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$ =2304

Die beste Lösung mit 7 Summanden wäre:

$22 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4$ ergibt $22 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4$ =2916

Die beste Lösung mit 8 Summanden wäre:

$22 = 3+3+3+3+3+3+2+2$ ergibt $22 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 2916$

Die beste Lösung mit 9 Summanden wäre:

$22 = 2+2+2+2+2+3+3+3+3$ ergibt $22 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 2592$

Die besten Lösungen sind also die mit 7 und 8 Summanden.

3. Zwei wichtige Ergebnisse

Bisher haben wir zwei wichtige Ergebnisse:

(1) Am besten scheint es zu sein, wenn die Summanden gleich groß sind.

(2) Bei der Zahl 22 sind 7 und 8 Summanden am besten.

Beide Ergebnisse nehmen wir nun genauer unter die Lupe.

Beispiel: Summe 10

1.Zahl	2. Zahl	Summe	Produkt
3	7	10	21
4	6	10	24
5	5	10	25
2	8	10	16
1	9	10	9

Beispiel: Summe 15

1.Zahl	2. Zahl	Summe	Produkt
7	8	15	56
6	9	15	54
5	10	15	50
4	11	15	44
3	12	15	36

Bei beiden Zahlen kann man sehen, wenn die Summanden nah bei einander liegen, dann kommt ein größeres Produkt heraus, wenn man sie miteinander multipliziert.

Wir werden noch untersuchen, wie viele Summanden am besten sind.

Vom Conway Game of Life zur Städteentwicklung

1. Einleitung

Das vom Mathematiker John Horton Conway im Jahre 1970 entwickelte Conway Game of Life, ist ein Spiel bei dem veranschaulicht wird, wie eine Zelle in mehreren Generationen lebendig wird, weiterlebt oder stirbt.

Dabei gibt es nur zwei Zustände: Die Zelle ist tot (0) oder lebendig (1).

Conway hat folgende Regeln festgelegt:

- bei genau 3 lebenden Nachbarn, entsteht neues Leben
- bei genau 2 lebenden Nachbarn, bleibt Leben erhalten, sofern vorhanden
- bei einem oder mehr als 3 lebenden Nachbarn, stirbt die Zelle

0	1	0
1	0	1
0	0	0

→

0	1	0
1	1	1
0	0	0

Dabei bilden die umliegenden 8 Felder die Nachbarn(die Zelle selbst zählt hier nicht dazu).
In der Mitte würde sich hier neues Leben bilden, weil sie von genau 3 Zellen umgeben ist. Wenn man die biologische Verhaltensweise von Zellen beobachtet, bemerkt man, dass dieses Modell gut passt, weil Zellen auch sterben wenn sie zu dicht beisammen sind.

2. Ergebnisse einer Vorarbeit

Nun hat die Jugend forscht Gruppe von Sebastian Bollig und Marius Ludwig 2008 hieran angesetzt und eine weitere Schicht hinzugefügt und das Problem in einen anderen Kontext gesetzt. Bei ihnen gab es in einer Stadt die drei Stände:

- 0 sozialschwach
- 1 bürgerlich
- 2 höhere Schichten

Weil sie jetzt drei Zustände hatten, wurden ihre Regeln komplizierter. Sie haben den Zellen einen Wert gegeben, wobei die Bezeichnungen der Zustände ihren Werten entsprechen, dass heißt der Zustand 0 hat den Wert 0, der Zustand 1 den Wert 1 und der Zustand 2 den Wert 2.
Über das Schicksal einer Zelle entscheidet dann die Summe aller Werte der Nachbarzellen und der Zelle selbst. Je höher diese Summe ist, desto besser ist praktisch das soziale Umfeld. Sie haben sich für folgende Regel entschieden:

- Summe 0-6: Die Zelle erhält den Wert 0
- Summe 7-11: Die Zelle erhält den Wert 1
- Summe 12-18: Die Zelle erhält den Wert 2

Hier ist jedoch zu beachten, dass anders als beim klassischen Conway, die Zelle selber auch gewertet wird. Stadt Tod oder Leben einer Zelle zu untersuchen, spielte jetzt der Status der Bewohner einer Zelle (= Stadtviertel) eine Rolle.

Das Ergebnis auf das sie stoßen, war z.B. eine Stadt, welche ein großes Gebiet mit Nullen und eines mit Zweien hatte, welche durch eine knappe „Mauer“ von Einsen getrennt war.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	1	1	2	2
1	1	2	2	2

Bei einer größeren Stadt gab es auch ein größeres Gebiet mit Einsen:

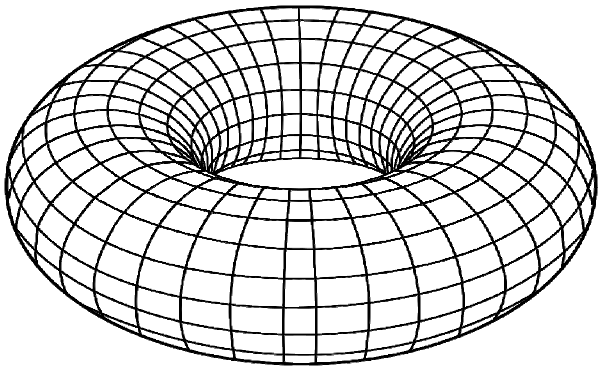
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	2
1	1	1	1	2	2
2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2

Aber „sozial schwache“ Stadtviertel waren immer von den „höheren“ Stadtvierteln durch „bürgerliche“ Viertel getrennt.

3. Unsere neuen Ideen

3.1 Verwendung des Torus:

Auf einen Hinweis unseres Betreuers haben wir darauf die Stadt zu einem Torus geformt, da die Stadt sonst Ränder hätte, welche bei der alten Arbeit komplizierte Randregeln benötigten, da die „Stadtviertel“ am Rand weniger Nachbarviertel haben. Die „Torusstadt“ erhält man, indem man den oberen Rand der Stadt mit dem unteren Rand verbindet. Dann hat man einen Zylinder. Jetzt muss man die Stadt noch so verbiegen, dass auch der linke und der rechte Rand zusammen kommen. Dadurch haben alle Stadtviertel gleich viele Nachbarn und man kann in jede Richtung praktisch „unendlich“ weit laufen.



Wir haben die Idee mit dem Torus zuerst im Konzept der Vorgängergruppe verwendet und konnten ohne Randregeln die Ergebnisse der Vorgängergruppe bestätigen.

3.2 Einführung von weiteren Ständen

Nach dieser Verwendung des Torus ergänzten wir die Stände um zuerst einen weiteren Stand.
Deshalb mussten wir die bestehende Regel um eine Regel für die Entstehung der Bevölkerungsdichte 3 erweitern. Da die Umgebung mit der Zelle selbst höchstens 27 Punkte haben können, haben wir die alte Regel einfach nur um eine Zeile erweitert:

0 – 6:	Die Zelle erhält den Wert 0
7 – 11:	Die Zelle erhält den Wert 1
12 – 18:	Die Zelle erhält den Wert 2
19 – 27:	Die Zelle erhält den Wert 3

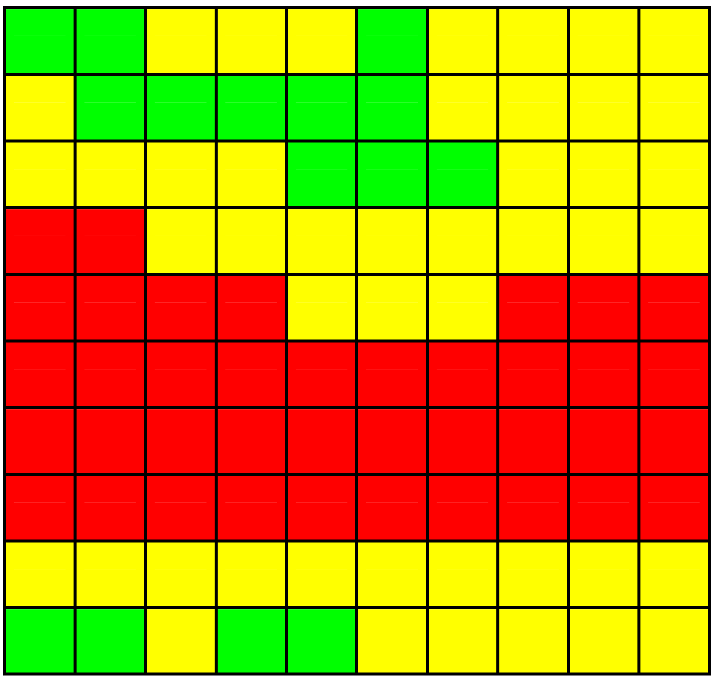
Diese Regel führte jedoch fast immer zum selben, langweiligen Ergebnis:

Das komplette Feld gefüllt mit dem dritten Stand.

3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Das könnte daran liegen, dass eine Zelle dessen Umgebung den selben Wert wie die Zelle selbst hat, seinen Wert auf jeden Fall hält, jedoch ist es so das sich der Wert einer Zelle sehr leicht erhöht, wenn sich nur der Wert einiger Zellen in seiner Umgebung erhöht. Das gilt allerdings nur wenn wir schon mindestens einen Wert von 1 haben.

Also haben wir die Regeln zuerst so verändert, dass eine Zelle erst ab Wert 14 auf den Stand 2 kommt:



0: 0-6
1: 7-13
2: 14-18
3: 19-27

Durch diese neuen Regeln gab es wieder ausgeglichene Ergebnisse, allerdings meist mit nur 3 unterschiedlichen Stände. Häufig entsteht eine Stadt in der ein Großteil von nur einem Stand bedeckt ist, und der Rest von zwei weiteren bevölkert ist. Die Stände haben wir eingefärbt.

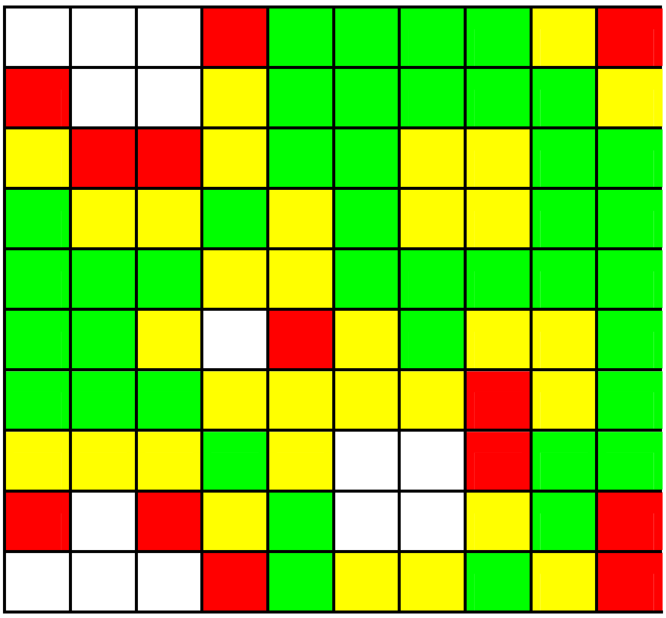
Hier gilt:	weiß	=	0
	Rot	=	1
	Gelb	=	2
	Grün	=	3

3.3 Gleichverteilungsregel

Nachdem wir nun einen weiteren Stand hinzugefügt haben, haben wir so wie bei der ursprünglichen Berechnung von Conway, eine Obergrenze hinzugefügt, sodass nicht zu viele Reiche nebeneinander wohnen, weil sie sich bei zu großer Dichte meiden:

0: 0-4
1: 5-8
2: 9-12
3: 13-17
2: 18-22
1: 25-26
0: 27

Wie man hieran sieht, geht bei zu hoher Dichte der „Bevölkerung“, die Zahl an Bewohnern wieder ab, sodass eine ausgewogene Bevölkerungsdichte..



Bei den Städten, die sich nach dieser Regel entwickeln, treten meistens alle vier Stände auf.

Außerdem ändern sich viele Städte nach einigen Generationen nicht mehr oder es entstehen Muster, die oszillieren, d.h. die sich in festen Abständen wiederholen.

Das wollen wir noch genauer untersuchen.