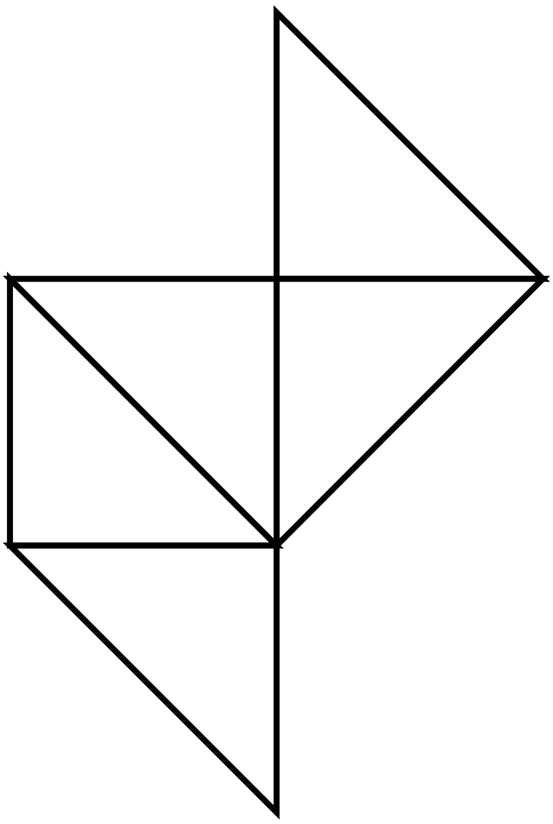
The MadMax



zeitung für mathematik am mpg trier / heft 37 / februar 2016

Liebe MadMax – Freunde,

diesmal war unser Team etwas kleiner und wir haben nur drei Themen bearbeitet. Weil die meisten von uns noch in der 5. oder 6. Klasse sind, ist die Mathematik auch für Orientierungsstufenschülerinnen und –schüler gut zu verstehen. In allen drei Beiträgen gibt es auch viele Zeichnungen, die das Verstehen zusätzlich erleichtern.

Viel Spaß beim Lesen und Mitdenken

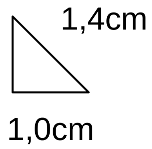
Euer MadMax –Team

Figuren aus Dreiecken – ein kleines Puzzle-Problem

1. Großer Umfang oder kleiner Umfang

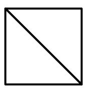
Wir legen verschieden viele Dreiecke zu einer Figur zusammen und messen den Umfang aus. Wir versuchen, für jede Zahl von Dreiecken die Figur mit dem kleinsten und dem größten Umfang zu legen.

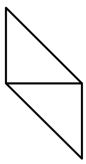
Ein Dreieck sieht so aus:

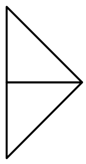


Der kleinste Umfang und der größte sind dann gleich: 3,4 cm.

Beispiele für Figuren mit zwei Dreiecken sehen z.B. so aus:

1. 

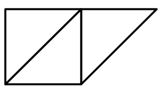
2. 

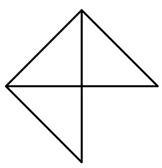
3. 

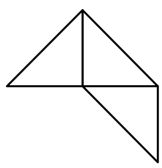
Umfang:	4,0 cm	4,8 cm	4,8 cm

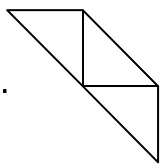
Wie man sieht, haben die beiden rechten Dreiecke den größten Umfang, weil zwei Diagonalen außen liegen und rechts keine Diagonale.

Beispiele für Figuren mit drei Dreiecken:

1. 

2. 

3. 

4. 

Umfang:	5,4cm	6,2cm	6,2 cm	6,2 cm

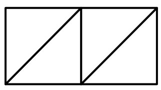
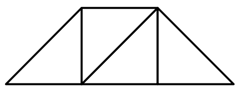
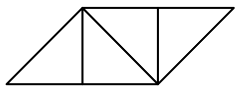
Das sind alle Möglichkeiten mit drei Dreiecken. Alle anderen sind nur gedreht oder gespiegelt.

Das erste Dreieck hat den kleinsten Umfang, weil es bei den Nummern 2, 3 und 4 mehr Diagonalen außen gibt als bei Nummer 1.

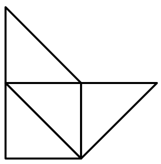
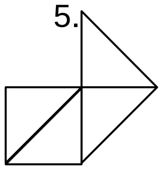
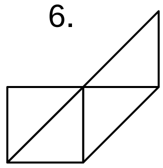
2. Je mehr Dreiecke, desto mehr Möglichkeiten

Mit einem Dreieck gab es nur eine Figur, mit zwei Dreiecken gab es drei Figuren und mit drei Dreiecken vier Figuren. Wir wollten wissen, wie das weitergeht. Gibt es zum Beispiel immer nur einen kleinsten Umfang und den größten dann öfter? Darum machen wir jetzt mit vier Dreiecken weiter.

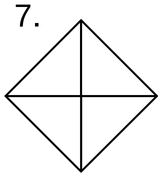
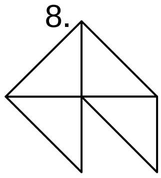
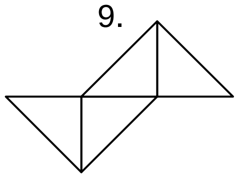
Beispiele mit vier Dreiecken:

1. 
2. 
3. 

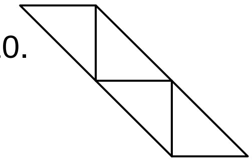
Umfang: 6,0cm 6,8cm 6,8cm

4. 
5. 
6. 

Umfang: 6,8cm 6,8cm 6,8cm

7. 
8. 
9. 

Umfang: 5,6cm 7,6cm 7,6cm

10. 

Umfang: 7,6cm

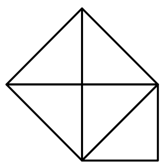
Wir glauben, dass das alle Möglichkeiten sind, weil wir sie systematisch geordnet haben.

Hier hat die Figur 7 den kleinsten Umfang, obwohl ganz viele Diagonalen außen liegen. Aber sie hat nur vier Seiten und alle anderen sechs. Es gibt wieder mehrere Seiten mit dem größten Umfang, aber nur eine mit dem kleinsten Umfang. Bei den größten sind alle vier Diagonalen außen und zwei kurze Seiten.

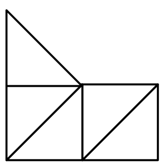
Figuren mit fünf Dreiecken:

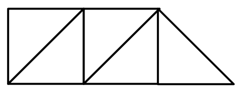
Hier haben wir nicht mehr alle gezeichnet. Wir haben nur versucht, die mit kleinstem und die mit größtem Umfang zu finden, und Figuren mit Umfängen, die dazwischen liegen.

Umfang: 6,2cm

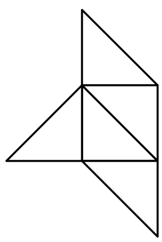


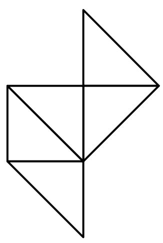
Umfang:7,4cm



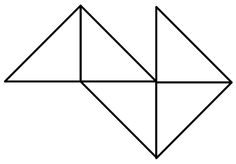


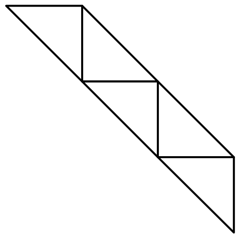
Umfang:8,2cm





Umfang:9,0cm

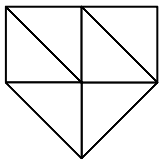




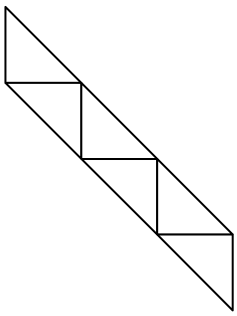
Die Figur mit dem kleinsten Umfang hat wieder zwei Seiten weniger außen als die anderen Figuren und es gibt wieder nur eine.

Figuren mit sechs Dreiecken:

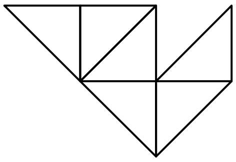
Kleinster Umfang: 6,8 cm

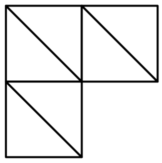


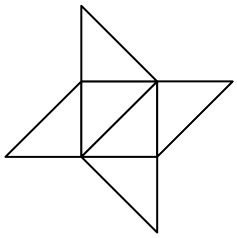
Größter Umfang: 10,4 cm

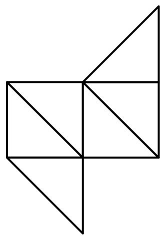


Andere schöne Figuren:



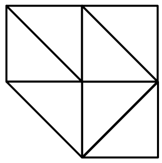




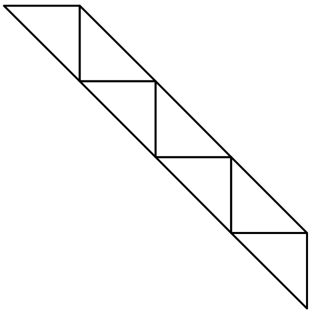


Figuren mit sieben Dreiecken:

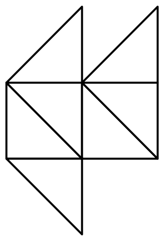
Kleinster Umfang: 7,4 cm

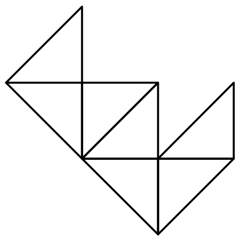


Größter Umfang:



Andere schöne Figuren:





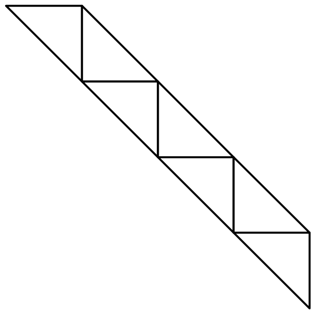
3. Das haben wir entdeckt

Wir haben eine Tabelle gezeichnet und unsere Ergebnisse eingetragen:

Anzahl der Dreiecke	Kleinster Umfang in cm	Größter Umfang in cm
1	3,4	3,4
2	4,0	4,8
3	5,4	6,2
4	5,6	7,6
5	6,2	9,0
6	6,8	10,4
7	7,4	11,8

Wir glauben bei dem größten Umfang eine Regel gefunden zu haben: Der Umfang wird immer um 1,4cm größer.

Bei dieser Figur, die wir Giraffe genannt haben, wird immer ein Dreieck mit der kurzen Seite an eine andere kurze Seite gelegt und es kommt immer eine Diagonale dazu. Darum ist unsere Regel richtig.



Beim kleinsten Umfang:

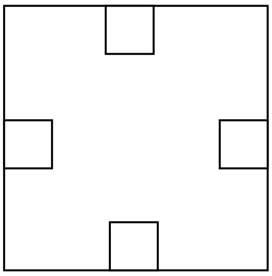
Am Anfang wurde der Umfang mal um 0,6 cm größer, dann um 1,4 cm und danach um 0,2 cm. Ab jetzt wurde der Umfang immer um 0,6 cm größer. Das haben wir bis zu sieben ausprobiert.

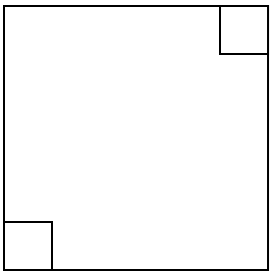
Stühle stellen – kein Problem

1. Gleich viele Stühle an jeder Wand

In unserem Thema geht es darum, dass man verschieden viele Stühle in einem quadratischen Raum unterbringen muss. Man muss darauf achten, dass gleich viele Stühle an jeder Wand stehen. In der Mitte dürfen keine Stühle sein. Wir wollen später das Problem mit anderen Raumformen ausprobieren.

In unserem ersten Beispiel haben wir vier Stühle. An jede Wand kommt ein Stuhl.





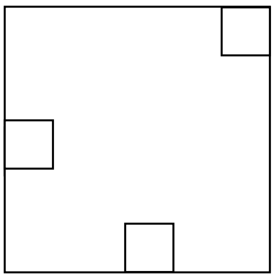
Im zweiten Beispiel haben wir nur zwei Stühle. Darin wird ein Stuhl in jeweils eine Ecke gestellt.

2. Wir untersuchen mit System

Ein Stuhl: Begonnen haben wir mit einem Stuhl, aber das ging nicht da man den einen Stuhl nicht so stellen konnte das an allen Wänden ein Stuhl stand.

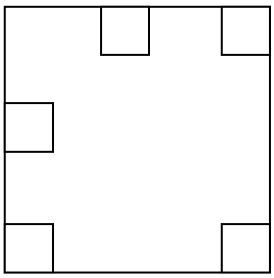
Zwei Stühle: Bei zwei Stühlen musste man jeden Stuhl in die gegenüberliegende Ecke stellen, so stand an jeder Wand ein Stuhl. Wir haben sie in jeweils die gegenüberliegende Ecke gestellt da sie dadurch automatisch an zwei Wänden gestanden haben.

Drei Stühle: Drei Stühle konnte man auch auf vier Wände verteilen indem man einen Stuhl in die Ecke gestellt und die anderen zwei Stühle auf die restlich zwei Wände verteilt hat.

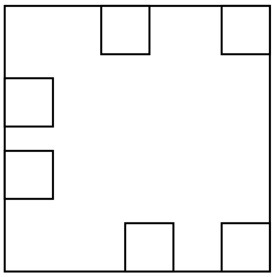


Vier Stühle: Im Beispiel mit vier Stühlen stellt man jeweils einen Stuhl an jede Wand oder man stellt je einen Stuhl in jede Ecke so dass dann jeweils zwei Stühle an jeder Wand stehen.

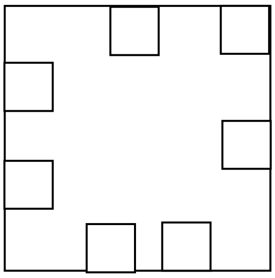
Fünf Stühle: Man besetzt drei Ecken mit jeweils drei Stühlen und dann kommen an zwei Seiten noch jeweils an Stuhl, sodass an jeder Wand zwei Stühle stehen



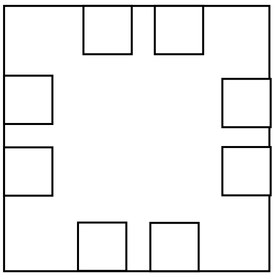
Sechs Stühle : Bei sechs Stühlen im Raum werden je zwei Stühle in die Ecke und die restlichen vier in die Mitte der drei Wänden gestellt.

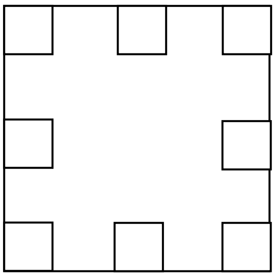


Sieben Stühle: Bei sieben Stühlen können nicht an jeder Wand gleich viele Stühle stehen.



Acht Stühle: Bei acht Stühlen gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder zwei Stühle an einer Wand oder drei Stühle an einer Wand. Bei der ersten Möglichkeit stehen die zwei Stühle in der Mitte der Wand. Bei der zweiten Möglichkeit wird ein Stuhl in die Ecke gestellt, so dass in jeder Ecke ein Stuhl steht.





3. Wer sucht, der findet – unser System hat eine Regel

Wir haben jetzt eine Regel gesucht und dafür zuerst eine Tabelle gemacht:

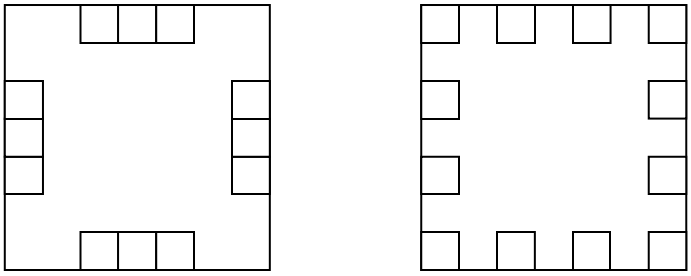
Stühle insgesamt	**Stühle an einer Wand**
1	geht nicht
2	1
3	1
4	1 oder 2
5	2
6	2
7	2
8	2 oder 3
9	3
10	3
11	3
12	3 oder 4
13	4
14	4
15	4
16	5

In der Tabelle haben wir ein System gefunden. Wenn die Zahl der Stühle aus der Viererreihe ist, dann kommen 4 Stühle in die vier Ecken und der Rest wird gleichmäßig auf die vier Wandmitten verteilt.

Bei der nächsten Zahl schiebt man dann aus einer Ecke einen Stuhl weg an eine Wandmitte und stellt den neuen Stuhl dann so in die Mitte einer Wand, dass an allen vier Wänden wieder so viele Stühle stehen wie vorher. So haben mindestens vier Anzahlen von Stühlen gleich viele Stühle an einer Wand stehen (siehe 8-12 und 12-15). Bei der nächsten Viererzahl hat man dann keinen Stuhl mehr in einer Ecke. Stellt man dann wieder vier Stühle in die vier Ecken, dann steht an jeder Wand ein Stuhl mehr.

Weitere Beispiele:

<u>Zwölf Stühle:</u> Bei zwölf Stühlen gibt es zwei Möglichkeiten. Bei der ersten Möglichkeit kommen drei Stühle an jede Wand und bei der zweiten Möglichkeit nehmen wir jeweils einen Stuhl von den dreien weg und setzen ihn in die Ecke.



Hier sieht man, wie man bei einer Viererzahl einen Stuhl mehr an die Wand bekommt.

Wir nehmen als weitere Beispiele die Zahlen 48, 49, 50, 51, 52 und 135 für die Anzahl der Stühle in einem Raum. Mit Hilfe unseres Systems lösen wir diese Beispiele:

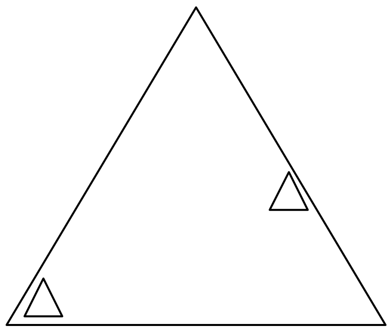
Bei achtundvierzig Stühlen können an jede Wand zwölf oder dreizehn Stühle gestellt werden.

Bei neunundvierzig Stühlen können auch dreizehn Stühle an eine Wand gestellt werden. Ebenso bei fünfzig und einundfünfzig. Bei zweiundfünfzig Stühlen ist wieder eine Viererzahl da und gibt es wieder zwei Möglichkeiten. Bei 135 Stühlen stehen an jeder Wand vierunddreißig Stühle und zwar in jeder Ecke einer und an der Wandmitte zweiunddreißig Stühle.

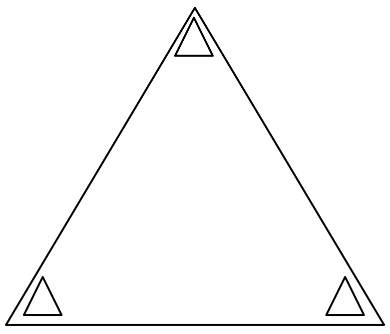
4. Stühle in einem dreieckigen Raum

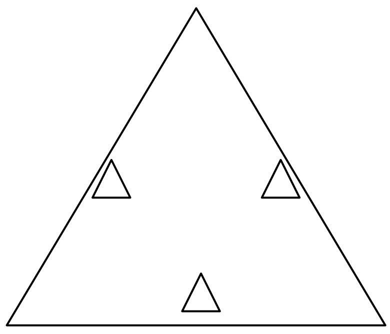
Wir haben uns dann überlegt, wie man die Stühle in einem dreieckigen Raum stellen muss. Damit die Stühle besser passen, machen wir sie auch dreieckig.

<u>Zwei Stühle:</u> Bei zwei Stühlen muss man einen Stuhl in die Ecke stellen und den anderen in die Mitte einer anderen Wand sodass an jeder Wand ein Stuhl steht.

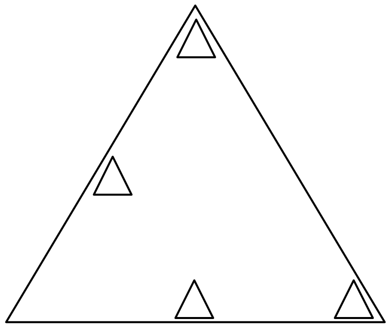


<u>Drei Stühle</u>: Bei drei Stühlen gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste ist das in jede Ecke ein Stuhl kommt und die zweite das alle Stühle an die Mitte der Wand gestellt werden sodass an jeder Wand ein Stuhl steht. Das ist wie bei vier Stühlen in einem viereckigen Raum.





<u>Vier Stühle:</u> Bei vier Stühlen werden zwei Stühle in die Ecke gestellt und die anderen zwei in die Mitte der Wand sodass an jeder Wand zwei Stühle stehen.



Fünf Stühle: Bei fünf Stühlen wird ein Stuhl in die Ecke gestellt und die restlichen vier in die Mitte verschiedener Wände sodass an jeder Wand zwei Stühle stehen.

Sechs Stühle: Bei sechs Stühlen gibt es zwei Möglichkeiten: erste Möglichkeit ist das an jeder Wand drei Stühle an einer Wand stehen (in jeder Ecke einer und in der Mitte jeder Wand einer und die zweite Möglichkeit das an jeder Wand zwei Stühle stehen (beide werden an die Wandmitte gestellt) .

Ergebnis:

Wir konnten feststellen, dass es bei den dreieckigen Raumformen ähnlich wie mit den viereckigen Raumformen ist, nur das bei den dreieckigen Raumformen die Dreierreihe eine Rolle spielt.

Wenn die Zahl der Stühle aus der Dreierreihe ist, dann kommen 3 Stühle in die drei Ecken und der Rest wird gleichmäßig auf die drei Wandmitten verteilt.
Bei der nächsten Zahl schiebt man dann aus einer Ecke einen Stuhl weg an eine Wandmitte und stellt den neuen Stuhl dann so in die Mitte einer Wand, dass an allen drei Wänden wieder so viele Stühle stehen wie vorher. So haben mindestens drei Anzahlen von Stühlen gleich viele Stühle an einer Wand stehen (siehe 3 und 6) Bei der nächsten Dreierzahl hat man dann keinen Stuhl mehr in einer Ecke. Stellt man dann wieder drei Stühle in die drei Ecken, dann steht an jeder Wand ein Stuhl mehr.

Ein Spiel mit einem Quadrat

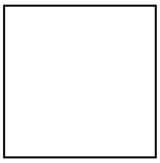
1. Spiel mit einem 4 x 4 - Quadrat

Unsere Aufgabe ist es, ein Quadrat zu zeichnen und dann können zwei Spieler miteinander spielen. Das geht so:

In das Quadrat zeichnet ein Spieler ein Kreuz. Dabei entstehen kleinere Quadrate. Der andere Spieler darf eines der Quadrate ausmalen. Dann malt der erste Spieler wieder ein Kreuz und der zweite Spieler darf wieder eine Fläche streichen. So geht es immer weiter. Das kleinste Quadrat darf ein Kästchen (0,5 cm x 0,5 cm) groß sein.

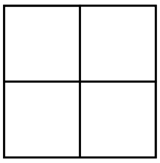
Beispiel mit einem 4 x 4 – Quadrat (Seitenlänge 4 Kästchen):

Start:



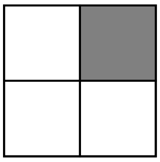
1. Spieler:

Der erste Spieler macht ein Kreuz in die Mitte.



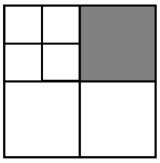
2. Spieler:

Der zweite Spieler malt ein Feld aus.

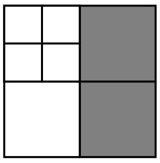


1 Spieler:

Der erste Spieler macht noch mal ein Kreuz in eins der Quadrate:

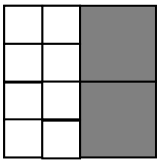


Der zweite Spieler malt noch mal ein möglichst großes Feld aus.



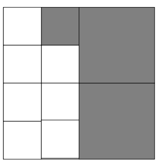
1 Spieler:

Der erste macht noch mal ein Kreuz in die Mitte des letzten großen Feldes.



2. Spieler:

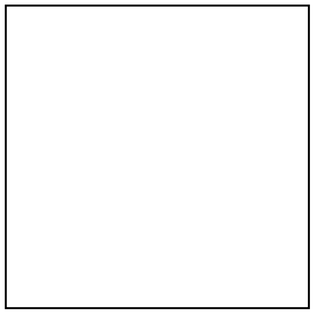
Der zweite Spieler malt noch mal ein Feld aus und dann ist das Spiel aus, weil der erste Spieler keine Kreuze mehr machen kann, weil die kleinste Seitenlänge 0,5cm betragen darf.



9/16 der Felder wurden angestrichen.

2. Wir machen das Quadrat doppelt so groß

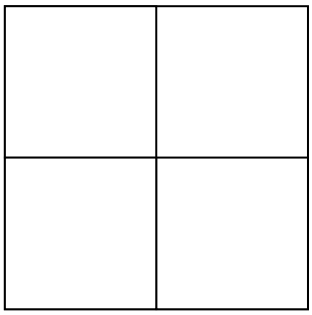
Wir erwarten, dass das Spiel jetzt länger dauert. Wir wissen aber nicht, ob wieder etwas mehr als die Hälfte ausgemalt wird.



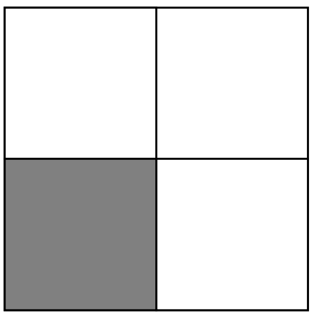
Beispiel: 4cm, d.h. 8 Kästchen

1. Spieler:

Der erste Spieler muss ein Kreuz in die Mitte malen.

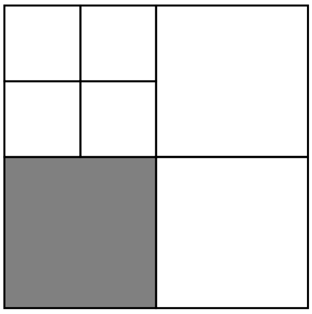


2. Spieler: Der zweite Spieler malt ein Feld aus.



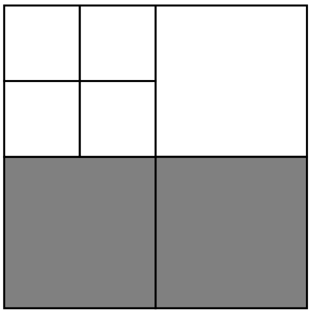
1.Spieler

Der erste Spieler muss noch mal ein Kreuz in ein Feld malen
.



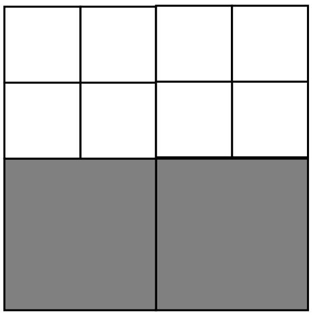
2.Spieler

Der zweite Spieler muss noch mal ein Feld ausmalen.



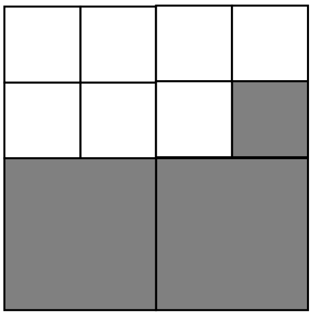
1.Spieler

Der erste Spieler muss noch mal ein Kreuz in das Feld malen.

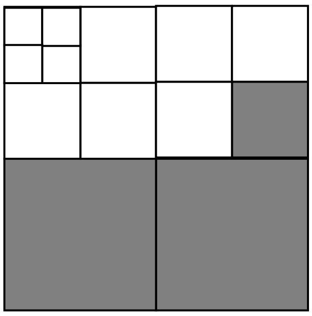


2.Spieler

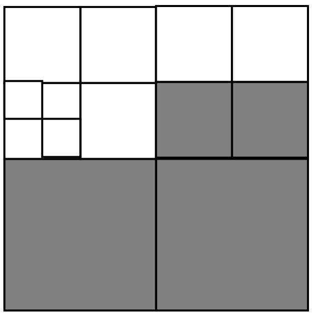
Der zweite Spieler malt ein Feld aus.



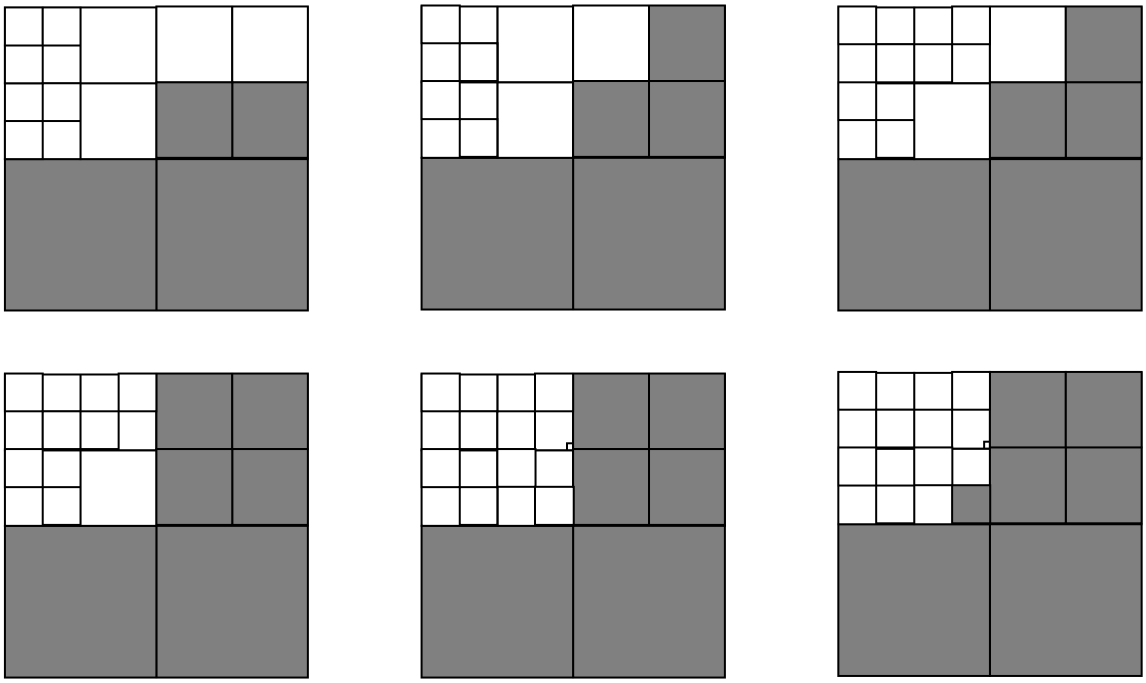
1. Spieler



2.Spieler



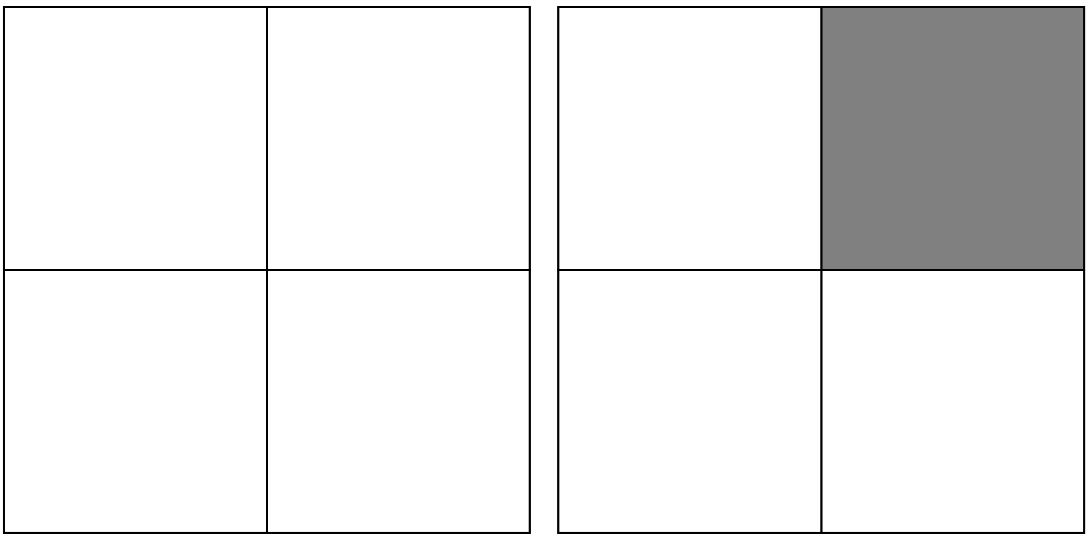
Damit es nicht so lang wird, malen wir jetzt einfach die nächsten Quadrate, bis das Spiel aus ist.

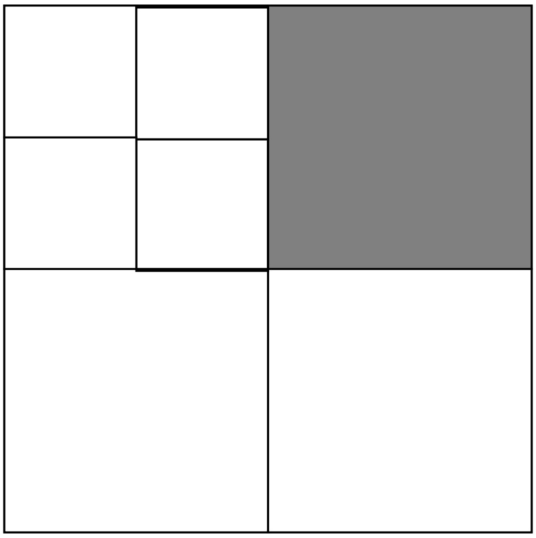


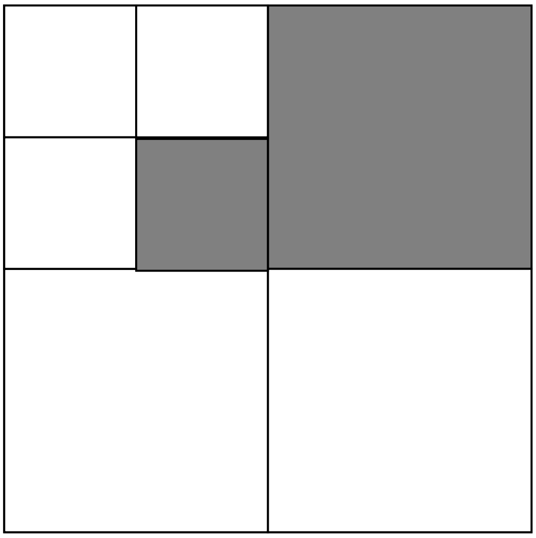
Es wurden 49/64 bei diesem Quadrat angestrichen.

3. Wir verdoppeln auf 16 Kästchen

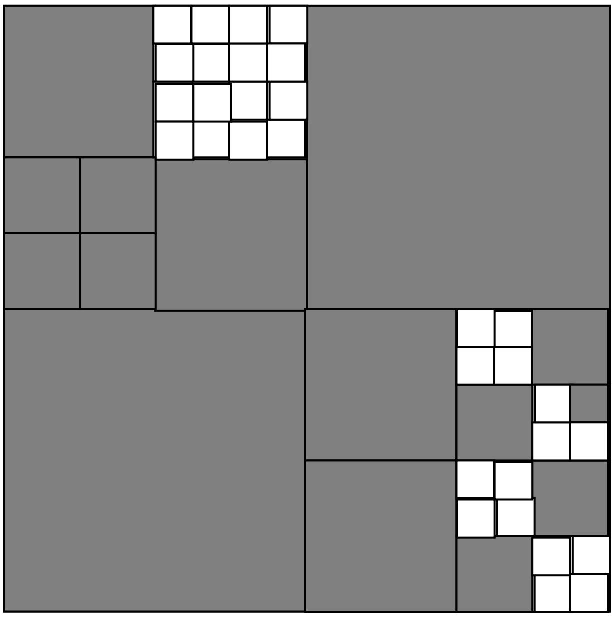
Hier hat der erste Spieler hat schon sein Kreuz gemacht:







Und so geht es immer weiter bis zu dem folgenden Bild:



Man sieht, dass diesmal 225 von 256 Kästchen ausgemalt sind.

4. Das haben wir herausgefunden

Quadrat mit vier Kästchen: 9/16 sind ausgemalt.

Quadrat mit acht Kästchen: 49/64 sind ausgemalt.

Quadrat mit sechszehn Kästchen:225/256 sind ausgemalt.

Uns ist aufgefallen, dass alle Zahlen Quadratzahlen sind:

Zum Beispiel im 4 x 4 Quadrat: 9 = 3*3 und 16 = 4*4.

Das wollen wir noch weiter untersuchen.