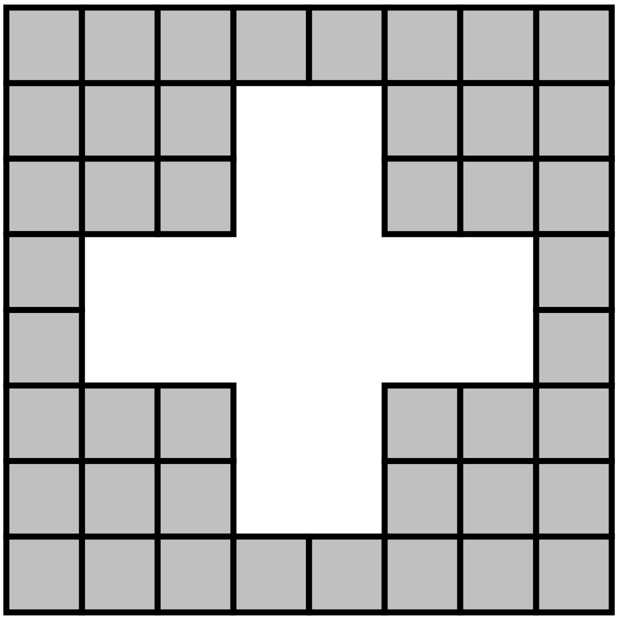
The MadMax



zeitung für mathematik am mpg trier / heft 35 / februar 2015

Liebe MadMax – Freunde,

mit einem zum Teil neuen Team haben wir wieder eine Reihe von mathematischen Problemen bearbeitet. In Remmidemmi, Parkettierung und Kreise mit Kreisen werden Arbeiten aus dem letzten Heft fortgeführt. Mit diesen Arbeiten treten die Autoren auch bei Schüler experimentieren an, genau wie Maximilian Kiefer und Linus Nawrocki mit dem neuen Thema Summenzahlen. Auch die anderen Themen sind neu.

Viel Spaß beim Lesen und Grübeln

Euer MadMax –Team

Fährmannprobleme

1. Einleitung

Wie bringt man einen Kohlkopf, eine Ziege, einen Wolf und einen Fährmann über einen Fluss?
Bei der Lösung muss man noch folgende Regeln beachten:

(1) Es dürfen höchstens nur 2 Personen auf einem Floß fahren.
(2) Nur der Fährmann darf steuern.
(3) Der Kohlkopf darf nicht mit der Ziege alleine sein, weil die Ziege ihn frisst.
(4) Die Ziege darf nicht mit dem Wolf zusammen sein, weil der Wolf sie frisst.

In der Tabelle ist links das eine und rechts das andere Ufer. Jede Zeile steht für das Ergebnis einer Hin- bzw. einer Rückfahrt.

Die Lösung des Problems:

	Linkes Ufer	**Rechtes Ufer**
Start	FKWZ	
1. Fahrt	KW	FZ
	FKW	Z
2. Fahrt	K	FWZ
	FZK	W
3. Fahrt	Z	FWK
	FZ	WK
4. Fahrt		FWZK

In unserer Arbeit wollen wir weitere Fährmannprobleme untersuchen.

2. Erste Verallgemeinerung

Wir machen das Ganze jetzt mit mehr Mitfahrern. Der Fährmann wird durch ! ersetzt, weil wir F als Mitfahrerbezeichnung brauchen.

Für die Mitfahrer gilt folgende Regel: A frisst B, B frisst C, C frisst D, …

Das Ganze untersuchen wir systematisch, indem wir nur mit dem Fährmann beginnen. Dann nehmen wir einen Mitfahrer und immer einen mehr.

2.1 Fährmann

!	
	!

2.2 Fährmann, A

! A	
	! A

2.3 Fährmann, A, B

! A B	
B	! A
!B	A
	!A B

2.4 Fährmann, A, B, C

! A B C	
AC	! B
! A C	B
C	! A B
! B C	A
B	! A C
! B	A C
	! A B C

Das ist eigentlich das Originalproblem. Nur die Personen heißen anders. Die nächsten Fahrten mit 4 oder mehr Mitfahrern können mit einer 2- Mann-Fähre nicht gemacht werden, weil der Fährmann weder A, B, C oder D alleine mitnehmen kann:

Würde er A mitnehmen, frisst B C und C D.
Würde er B mitnehmen, frisst C D.
Würde er C mitnehmen, frisst A B.
Würde er D mitnehmen, frisst A B und B C.

Darum brauchen wir für 4 Mitfahrer eine 3- Mann-Fähre:

2.5 Fährmann, A, B, C, D

!ABCD	
AC	!BD
!AC	BD
	!ABCD

2.6 Fährmann, A, B, C, D, E

!ABCDE	
ACE	!BD
!ACE	BD
E	!ABCD
!BDE	AC
BD	!ACE
!BD	ACE
	!ABCDE

In den nächsten Fahrten brauchen wir eine 4-Mann- Fähre, weil der Fährmann weder A und B, A und C noch irgendein anderes Paar mitnehmen kann, ohne dass einer restlichen Mitfahrer gefressen wird.

2.7 Fährmann, A, B, C, D, E, F

!ABCDEF	
BDF	!ACE
!BDF	ACE
	!ABCDEF

2.8 Fährmann, A, B, C, D, E, F, G

!ABCDEFG	
ACEG	!BDF
!ACEG	BDF
G	!ABCDEF
!BDFG	ACE
BDF	!ACEG
!BDF	ACEG
	!ABCDEFG

Wir haben folgendes Herausgefunden:

Man braucht für jeden zweiten neuen Mitfahrer eine größere Fähre, weil man eine mindestens so große Fähre braucht wie die Hälfte der Passagiere die über den Fluss wollen.
Die Taktik muss so verlaufen wie im folgenden Beispiel:

Wir haben ABCDE, eine 3- Mann-Fähre und den Fährmann(!).
Man muss die Passagiere so nehmen, dass keiner gefressen wird(B,D).
ACE bleiben erst mal auf der anderen Seite.
Der Fährmann fährt alleine zurück.

Nun muss er versuchen die anderen drei nach drüben zu bringen:
Er muss zwei von ihnen(AC) nehmen und diese auf die andere Seite bringen.
Er muss B und D aber wieder mit nehmen.
Dann muss er E über den Fluss bringen.

Dann ist es nicht mehr schwer, denn der Fährmann muss nur noch B und D auf die andere Seite bringen, das kann er mit einem Zug.

3. Zweites Fährmannproblem

In den nächsten Fahrten gibt es erst zwei A, dann zwei B, dann zwei C…
Den Fährmann gibt es natürlich nur einmal, sonst wäre es zu einfach.

! A A	
A	! A
!A	A
	! AA

Bei zwei A und zwei B brauchen wir eine Drei-Mann Fähre, weil er die As und die Bs nicht auseinander bringen kann.

!AABB	
BB	!AA
!BB	AA
	!AABB

!AABBCC	
AACC	!BB
!AACC	BB
CC	!AABB
!CCBB	AA
BB	!AACC
!BB	AACC
	!AABBCC

Genauso braucht man für die nächsten beiden Probleme eine Fünf-Mann-Fähre, dann eine Sieben-Mann-Fähre usw.

!AABBCCDD	
AACC	!BBDD
!AACC	BBDD
	!AABBCCDD

!AABBCCDDEE	
AACCEE	!BBDD
!AACCEE	BBDD
EE	!AABBCCDD
!BBDDEE	AACC
BBDD	!AACCEE
!BBDD	AACCEE
	!AABBCCDDEE

!AABBCCDDEEFF	
BBDDFF	!AACCEE
!BBDDFF	ACE
	!AABBCCDDEEFF

!AABBCCDDEEFFGG	
AACCEEGG	!BBDDFF
!AACCEEGG	BBDDFF
GG	!AABBCCDDEEFF
!BBDDFFGG	AACCEE
BBDDFF	!AACCEEGG
!BBDDFF	AACCEEGG
	!AABBCCDDEEFFGG

Kästchen ausmalen

1. Einleitung

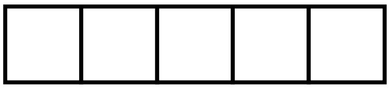
Bei unserer Arbeit malen wir Kästchen auf Karopapier aus. Dabei muss jedes Kästchen mit mindestens einer Seite ein anderes Kästchen berühren.
Dabei wollen wir herausfinden wie man mit einer bestimmten Anzahl von Kästchen den größten und den kleinsten Umfang bekommt.

2. Der größtmögliche Umfang

Den größtmöglichen Umfang erhält man, wenn man mit den Kästchen eine Reihe bildet.

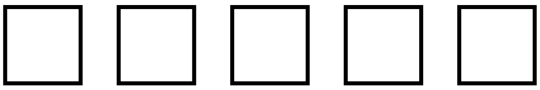
Beispiel:

5 Kästchen:

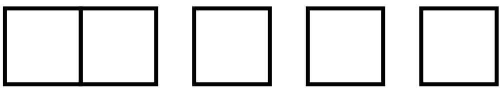


Der größtmögliche Umfang bei 5 Kästchen ist 5+5+2=12.
Der Umfang ist also 12.

Wir erklären jetzt, warum das der größtmögliche Umfang ist. Wenn man zum Beispiel alle Kästchen getrennt legen dürfte, dann hätte man einen größeren Umfang, nämlich 20:

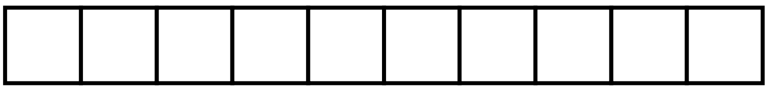


Würde man ein Kästchen an ein anderes „schieben“ dann würden 2 Seiten verloren gehen. Also wäre der Umfang nur noch 18:



Wenn man das so weiter macht wird der Umfang immer um 2 Kästchen kleiner.

Bei10 Kästchen:

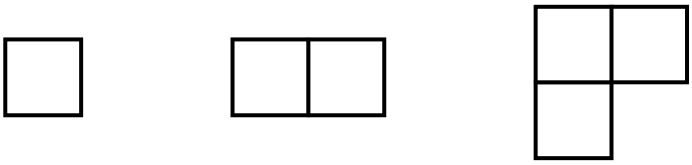


Die Gleichung bei der Anzahl von 10 Kästchen heißt 10+10+2=22
Der größtmögliche Umfang von 10 Kästchen ist also 22.

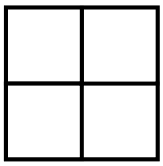
Der größte Umfang bei n Kästchen ist U = n + n + 2.

3. Der kleinstmögliche Umfang

Man erlangt den kleinstmöglichsten Umfang wenn man alle vorhandenen Kästchen eng zusammenfügt. Bei 1, 2 und 3 bleibt der Umfang immer gleich.
Da hat man schon den größtmöglichen und den kleinstmöglichen Umfang.

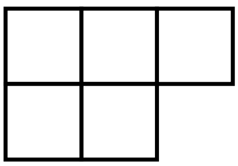


Bei 4 Kästchen ist es ein bisschen anders. Da gibt es verschiedene Umfänge. Der kleinstmögliche Umfang wäre 8.

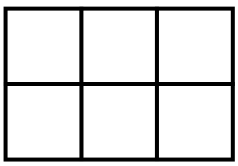


Immer wenn man n Kästchen so eng aneinander setzt, ergibt das den kleinstmöglichsten Umfang.

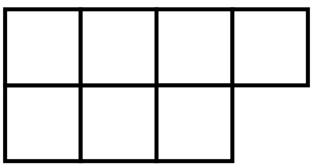
5 Kästchen: U=10



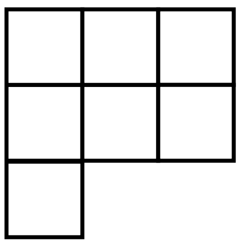
6 Kästchen: U = 10



7 Kästchen: U = 12



oder



4. Übersicht:

Anzahl Kästchen	kleinster Umfang	größter Umfang
1	4	4
2	6	6
3	8	8
4	8	10
5	10	12
6	10	14
7	12	16
8	?	18
9	?	20
10	?	22
11	?	24
12	?	26
n	?	2 x n + 2

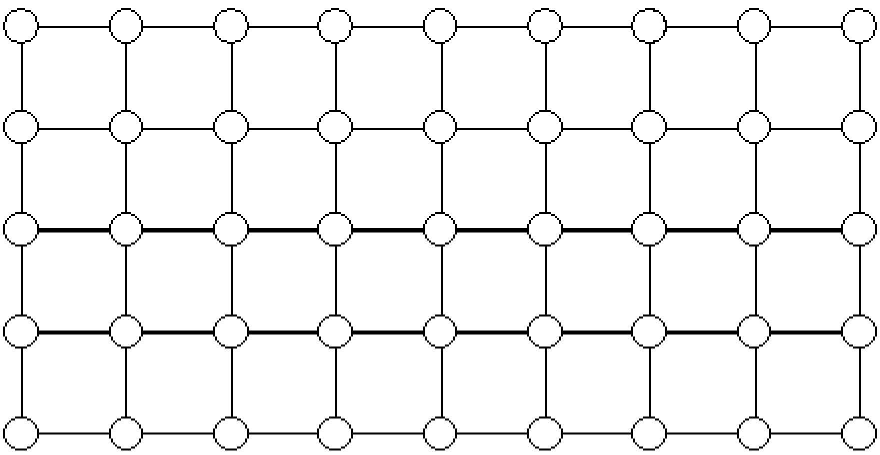
Die Fragezeichen in der Tabelle müssen wir noch untersuchen.

Netze und Ketten

1. Einleitung

Aus Ösen und Drahtstücken kann man Ketten und Netze knüpfen. Die Verbindungsstücke zwischen den Ösen sollen dabei alle die gleiche Länge haben. Netzbreite und –länge sind dann Vielfache von dieser Einheit.

So hat das folgende Netz die Breite 8 und die Höhe 4.



Uns haben nun ein paar Fragen beschäftigt, zum Beispiel:

- Wie viele Ösen und Verbindungsstücke braucht man, um ein solches Netz zu bilden?
- Allgemein bei Länge a und Breite b?
- Wenn das Netz ein Loch hat (Eine Öse und Nachbardrähte)?
- Größere Löcher? Am Rand oder in der Mitte? Verschiedene Formen?

2. Ergebnisse

In unserem ersten Beispiel braucht man (4+1)*(8+1) = 5*9 = 45 Ösen.

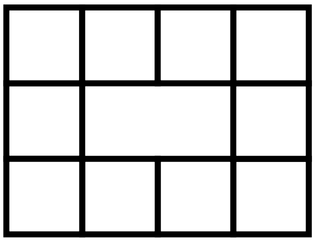
Wenn das Netz also die Länge a und die Breite b hat, dann braucht man (a+1)*(b+1) Ösen.

Beispiel: (5*8)+(9*4)=76

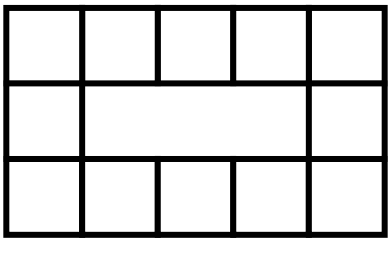
Für die Drähte gilt: (b+1)*a+(a+1)*b

3. Schlitze im Netz

Wir lassen durch Schlitze Löcher im Netz entstehen die immer größer werden. Wie viele Drähte fehlen und wie viele Ösen fehlen ?



Hier haben wir 1Draht und 0 Ösen weniger



Hier haben wir 2 Drähte und 0 Ösen weniger

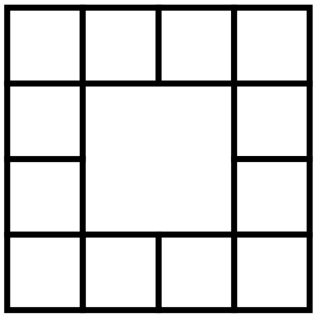
Es gibt immer einen Draht weniger als es Kästchen gibt. Die Ösen bleibt gleich.

Bsp.: Bei einem 17 Kästchen langen Schlitz hat man 16 Drähte weniger und 0 Ösen weniger.

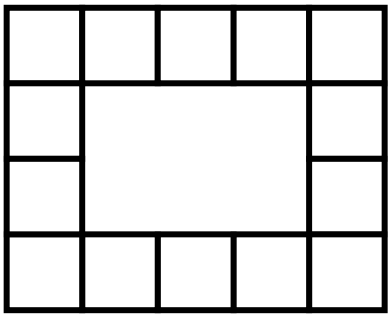
4. Breitere Schlitze im Netz

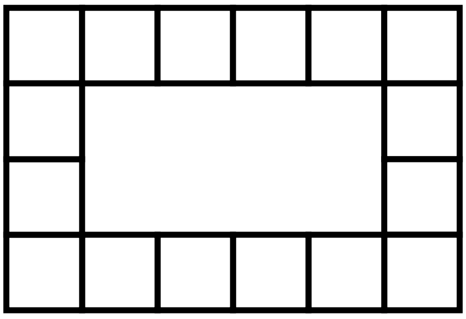
4.1 Schlitze der Breite 2

Hier sind es 4 Drähte und 1 Öse weniger.



Hier sind es 7 Drähte und 2 Ösen weniger.



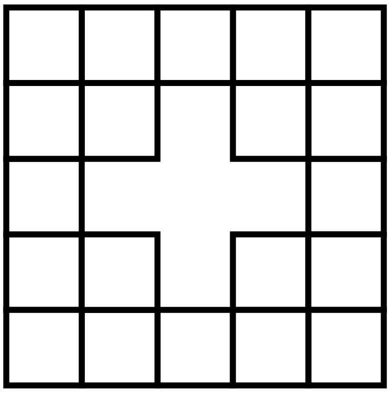


Hier sind es 10 Drähte und 3 Ösen weniger.

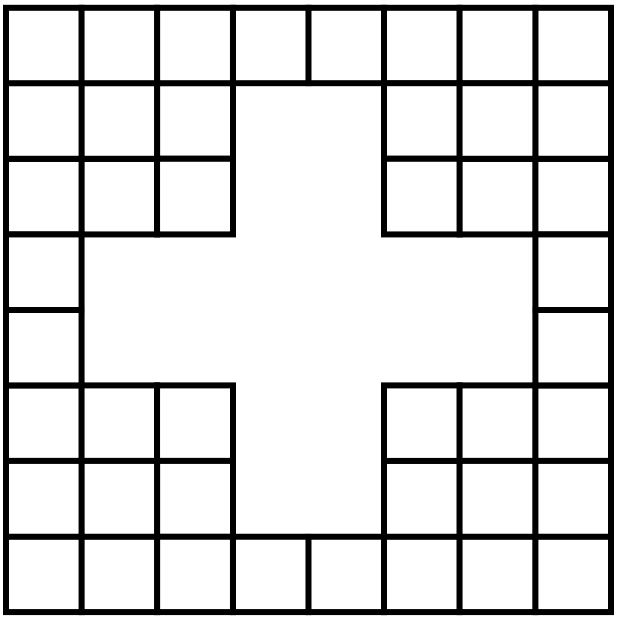
Wenn man den Schlitz eine Spalte breiter macht, braucht man 3 Drähte und 1 Öse weniger.

5. Wir schneiden Kreuze aus

Hier sind es 4 Drähte und 0 Ösen weniger.



Hier gibt es 28 Drähte und 9 Ösen weniger.

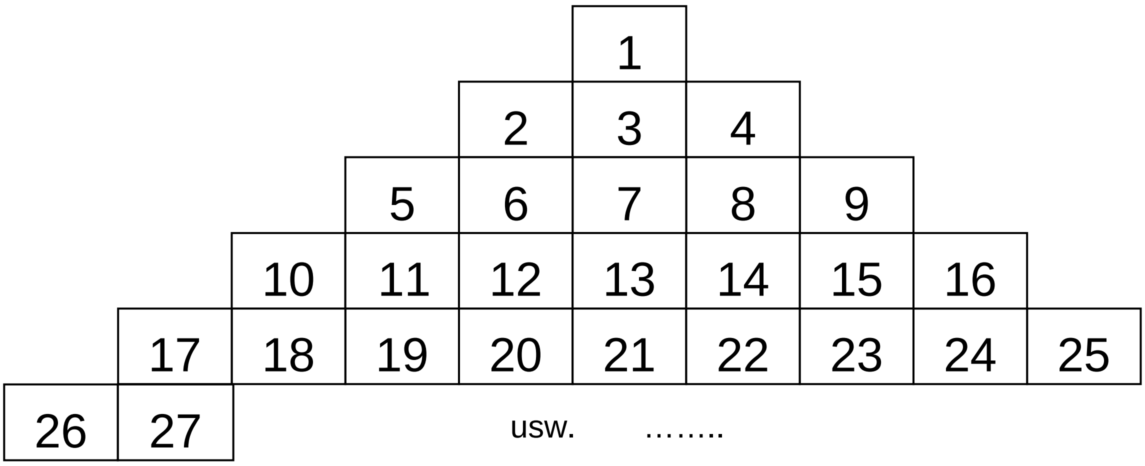


Eine allgemeine Regel haben wir hier noch nicht gefunden.

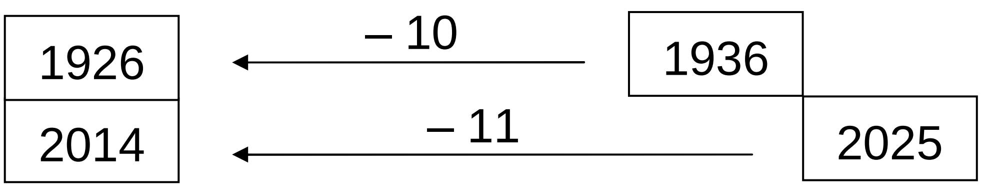
Remmidemmi
(Idee aus „Mathematik ohne Grenzen 2007“)

1. Erinnerung

Im letzten Heft haben ein dreieckförmiges Hochhaus mit vielen Stockwerken und vielen Wohnungen untersucht. Der Bewohner der Wohnung 2014 beklagt sich über den lärmenden Bewohner über ihm. Wir haben herausgefunden, in welcher Wohnung sich der Störenfried befindet.

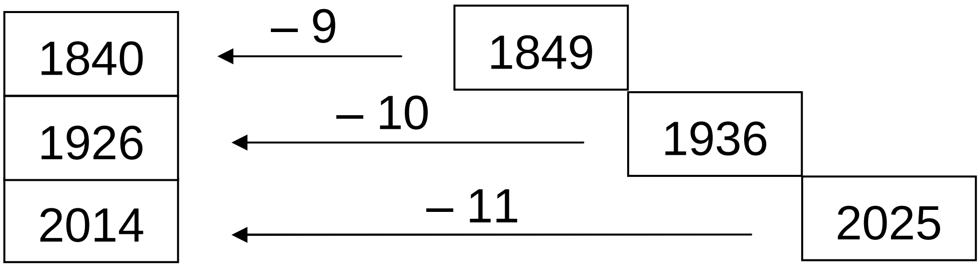


Dazu war uns aufgefallen, dass die Nummern der Wohnungen ganz rechts immer Quadratzahlen sind. Das haben wir in MadMax 34 erklärt.
Das Schema zeigt, wie man damit die Wohnung obendrüber findet:



Wie man sieht, muss man nur die nächst größere Quadratzahl suchen. Man muss die Differenz von den Zahlen 2025 und 2014 bilden. Dann ist die Differenz von der nächst kleineren Quadratzahl1936 und der Wohnung über 2014 um 1 kleiner.

Wer wohnt zwei Stockwerke drüber?



Wir haben dieses Schema weiter geführt und die letzte Zahl über 2014 gesucht.

Dabei sind wir mit Hilfe dieser Tabelle zu folgendem Ergebnis gekommen: die gesuchte Zahl heißt 1156. Es ist natürlich eine Quadratzahl, weil es im 34. Stockwerk die Wohnung ganz rechts ist.

Stockwerk	Rechnung	Wohnung
45	-11	45^2 -11 = 2014
44	-10	44^2 -10 = 1926
43	-9	43^2 - 9 = 1840
42	-8	42^2 - 8 = 1756
41	-7	41^2 - 7 = 1675
40	-6	40^2 - 6 = 1594
39	-5	39^2 - 5 = 1516
38	-4	38^2 - 4 = 1440
37	-3	37^2 - 3 = 1366
36	-2	36^2 - 2 = 1294
35	-1	35^2 - 1 = 1224
34	-0	34^2 - 0 = 1156

2. Die Wohnungen unter der 2014

Man kann auch die Wohnungen unter der 2014 mit diesem Schema finden. Dann muss man immer 1 mehr von dem Quadrat der Stockwerkszahl subtrahieren:

46. $46^2 - 12 = 46^2 - (46 – 34)$
47. $47^2 - 13 = 47^2 - (47 – 34)$
48. $48^2 - 14 = 48^2 - (48 – 34)$

Uns ist aufgefallen, dass die Zahl, die man subtrahieren muss, die Differenz aus der Stockwerkszahl und der 34 ist. Deshalb können wir jetzt jede Wohnungsnummer unter der 2014 berechnen:

79. $79^2 -$ $(79 – 34)$

273. $273^2 - (273 – 34)$

Allgemein gilt, wenn man im n-ten Stockwerk ist, dann muss man von n^2 34 subtrahieren.

3. Wir bauen ein neues Haus

Wenn man ein Haus anders baut, dann gibt es andere Rechnungen dafür, wo die Nummer 2014 liegt und wer drüber oder drunter wohnt. Das haben wir jetzt untersucht:

						1						
				2	3	4	5	6				
		7	8	9	10	11	12	13	14	15		
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

Zuerst haben wir untersucht, wie sich die Differenz von Nummern ändert, die unter einander liegen:

9 – 2 = 7 von 7 bis 11 sind vier

20 – 9 = 11 von 11 bis 15 auch vier

35 – 20 = 15 von 15 bis 19 auch 4

49 – 35 = 19 von 19 bis 15 auch 4

Es kommen immer 4 Nummern mehr dazu, als eine Etage darüber dazugekommen sind.

Das gilt auch für die Wohnungen unter der 1, wie die folgende Tabelle zeigt:

Stock	Wohnung	dazu
1	1	3
2	4	3+4
3	11	3+4+4
4	22	3+4+4+4

Dann haben wir uns gefragt: Gibt es eine regelmäßige Reihenfolge bei den Diagonalen (die äußeren Wohnungen (grün markierte Zahlen))?

1,6,15,28,45,67,93

Mit Hilfe einer Excel - Tabelle haben wir für die Wohnung 2014 die darüber und darunter liegende Wohnung gefunden.

Hier eine Skizze:

1890	1891				
2013	2014	2015	2016		
2140	2141	2142	2143	2144	2145

Vielleicht untersuchen wir noch ein Haus, das am Rand immer 3 Wohnungen breiter wird:

						1						
			2	3	4	5	6	7	8			
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Summenzahlen

1. Einleitung

In unserem Thema geht es um natürliche Zahlen, die sich durch hintereinander folgende Zahlen als Summen darstellen lassen.

<u>Beispiele:</u>

3 = 1 + 2
5 = 2 + 3
6 = 1 + 2 + 3

Es gibt auch Zahlen, die sich nicht so darstellen lassen, z.B. die 1, die 2 oder die Zahl 4. Bei der 4 kann man das gut sehen, denn 1 + 2 ist zu klein und die Summe 2 + 3 schon zu groß.
Wir wollen herausfinden, welche Zahlen man durch hintereinander folgende Zahlen darstellen kann und welche nicht, und ob man da Regeln finden kann.

2. Erste Ergebnisse

Alle ungeraden Zahlen bis auf die Eins kann man durch eine Summe von zwei natürlichen, hintereinander folgenden Zahlen darstellen, weil bei zwei aufeinander folgenden Zahlen eine gerade und eine ungerade Zahl dabei ist. Man findet diese Zahlen, z.B. bei der 57, wenn man die letzte gerade Zahl durch 2 teilt, in diesem Fall die 56 und diese auf 2 gleichgroße Zahlen aufteilt. Dann kommt zweimal die 28 raus. Da man davor einen von der 57 abgezogen hat, muss man an eine 28 die Eins wieder dranhängen. Danach addiert man die beiden Zahlen und erhält die gewünschte Zahl. Das wäre also 57 = 28 + 29.

<u>Beispiel:</u>

3 = 1+2
5 = 2+3
7 = 3+4
9 = 4+5
…
63 = 31 + 32
…

Alle geraden Zahlen lassen sich nicht in zwei aufeinander folgende Zahlen aufteilen, weil sie aus einer geraden und einer ungeraden Zahl bestehen, und eine gerade und eine ungerade Zahl immer eine ungerade Zahl ergibt (siehe oberes Beispiel).

Deshalb lassen sich auch alle Zweierpotenzen nicht als Summe von natürlichen, aufeinander folgenden Zahlen schreiben.

3. Additionen mit 2, 3 und 4 Summanden

3.1 Drei Summanden

Wie schon gesagt, mit 2 Summanden erhält man immer eine ungerade Zahl als Summe. Mit drei Summanden kann man jedoch gerade und ungerade Zahlen erhalten.

Behauptung: Mit drei Summanden kann man ab der sechs jede Zahl in der Dreierreihe erhalten. Bis auf die drei ist das die ganze Dreierreihe.

<u>Beispiel:</u>

6 = 1+2+3
9 = 2+3+4
12 = 3+4+5
15 = 4+5+6
…

Um die Summanden zu erhalten, muss man die Zahlen in der Dreierreihe durch 3 teilen. Den Quotienten, den man erhält, muss man mit seinem Vorgänger und seinem Nachfolger als weitere Summanden benutzen.

<u>Beispiel:</u>

258 : 3 = 86
= 85 + 86 + 87 = 258
V Z N

3.2 Vier Summanden

Behauptung: Bei 4 Summanden kann man jede zweite gerade Zahl ab der 10 aufteilen.

Hier erhält man immer gerade Zahlen, da zwei ungerade Summanden immer eine gerade Zahl ergeben (z. B. bei dem Aufbau der 10 [1+2+3+4] : Diese enthält zwei ungerade Zahlen, in dem Fall die 1 und die 3. Zusammen ergeben sie 4 und diese ist eine gerade Zahl) und die geraden Zahlen ergeben ebenfalls eine gerade Zahl als Summe.

<u>Beispiel:</u>

10 =   1+2+3+4
14 =   2+3+4+5
18 =   3+4+5+6
22 =   4+5+6+7

Hierbei muss man aufpassen: Die Zahl, die man mit 4 Summanden aufteilen möchte, darf nicht in der Viererreihe liegen. Ansonsten kann man jede gerade Zahl mit 4 Summanden aufteilen.

Wenn man eine Zahl in 4 Summanden aufteilen will, muss man folgendes machen, z.B. mit der 126: Man teilt diese Zahl durch 2, das ergibt 63. Dann muss man diese Zahl in zwei aufeinander folgende Zahlen aufteilen, in diesem Fall die 31 und die 32. Darauf nimmt man den Vorgänger der niedrigeren Zahl und den Nachfolger der größeren Zahl. Nun hat man die 4 Summanden:
30 + 31 + 32 + 33 = 126.

5. Anhang: Überblick über die Darstellung der ersten 40 Zahlen

Zahl	Darstellung	Anzahl der Summanden	Anzahl der Darstellungen
1	-	0	0
2	-	0	0
3	1+2	2	1
4	-	0	0
5	2+3	2	1
6	1+2+3	3	1
7	3+4	2	1
8	-	0	0
9	4+5	2	2
-	2+3+4	3	
10	1+2+3+4	4	1

11	5+6	2	1
12	3+4+5	3	1
13	6+7	2	1
14	2+3+4+5	4	1
15	7+8	2	3
-	4+5+6	3	
-	1+2+3+4+5	5	
16	-	0	0
17	8+9	2	1
18	5+6+7	3	2
-	3+4+5+6	4	
19	9+10	2	1
20	2+3+4+5+6	5	1
21	10+11	2	3
-	6+7+8	3	
-	1+2+3+4+5+6	6	
22	4+5+6+7	4	1
23	11+12	2	1
24	7+8+9	3	1
25	12+13	2	2
-	3+4+5+6+7	5	
26	5+6+7+8	4	1
27	13+14	2	3
-	8+9+10	3	
-	2+3+4+5+6+7	6	
28	1+2+3+4+5+6+7	7	1
29	14+15	2	1
30	9+10+11	3	3
-	6+7+8+9	4	
-	4+5+6+7+8	5	
31	15+16	2	1
32	-	0	0
33	16+17	2	3
-	10+11+12	3	
-	3+4+5+6+7+8	6	

34	7+8+9+10	4	1
35	17+18	2	3
-	5+6+7+8+9	5	
-	2+3+4+5+6+7+8	7	
36	11+12+13	3	2
-	1+2+3+4+5+6+7+8	8	
37	18+19	2	1
38	8+9+10+11	4	1
39	19+20	2	3
-	12+13+14	3	
-	4+5+6+7+8+9	6	
40	6+7+8+9+10	5	1

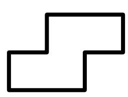
Wie man sieht, treten in der Tabelle auch Summen mit 5 oder mehr Summenden auf. Wir wollen noch untersuchen, welche Regeln hier gelten.

Parkettierung von Rechtecken mit einfachen Figuren

(Idee aus: Wettbewerb Känguru, 2013, Klassenstufen 7 und 8)

1. Erinnerung

Wir wollen ein System entwickeln in dem es um das Füllen von Rechtecken mit einfachen Figuren geht. Dabei können die Rechtecke eine beliebige Größe haben. Als einfache Figur verwenden wir zuerst:



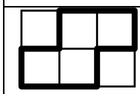
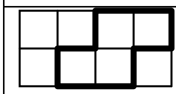
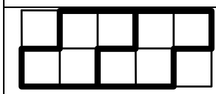
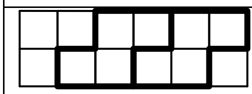
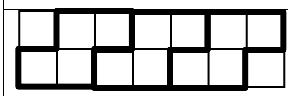
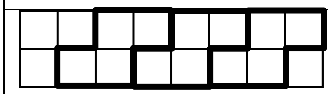
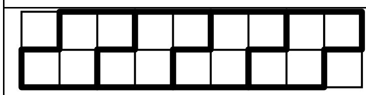
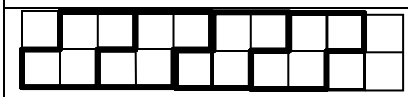
Die Figuren können gedreht oder gespiegelt werden:

Wir versuchen so viele Figuren wie möglich in ein Rechteck zu bekommen. Damit setzen wir die Untersuchung von Zoe Harder und Mariano Festa aus dem MadMax 34 fort, in der sie nur Quadrate untersucht haben. Damit haben sie auch am Wettbewerb „Schüler experimentieren 2013/2014“ teilgenommen.

2. Systematische Untersuchung von Rechtecken

Wir untersuchen nun Rechtecke allgemein. Da ein Rechteck mindestens 3x2 Einheiten groß sein muss, um mindestens eine unserer Figuren hinein zu legen, zeigen wir als kleinstes Rechteck ein 3x2 Rechteck.

2.1 Untersuchung von n x 2 Rechtecken

Figur	Anzahl der Figuren	Änderung	Anzahl der freien Kästchen	Änderung
	1		2	
	1	+0	4	+2
	2	+1	2	-2
	2	+0	4	+2
	3	+1	2	-2
	3	+0	4	+2
	4	+1	2	-2
	4	+0	4	+2

Da man hier die Figuren nur horizontal einfügen kann, haben wir immer nur abwechselnd 2 und 4 freie Kästchen gehabt. Die Anzahl der Figuren wechselt, wie oben zu sehen, immer nach jeder zweiten Figur.
Bei den Figuren 3x2, 5x2, 7x2…sieht man in der Tabelle, dass nur 2 Kästchen frei bleiben. Bei 4x2, 6x2, 8x2…bleibt eine ganze vertikale Reihe frei. Also 4 freie Kästchen insgesamt. Dennoch kann man keine weitere Figuren einfügen, denn man kann die 4 freien Kästchen nicht so zusammenlegen, dass man eine weitere Figur einfügen kann.
Wir haben auch überlegt, wie viele Figuren rein passen, wenn das Rechteck die Länge n hat? Wenn n ungerade ist, z.B. n = 7, dann passen (7 – 1):2 = 3 Figuren rein. Bei n = 9 passen (9 – 1):2=4 Figuren rein.

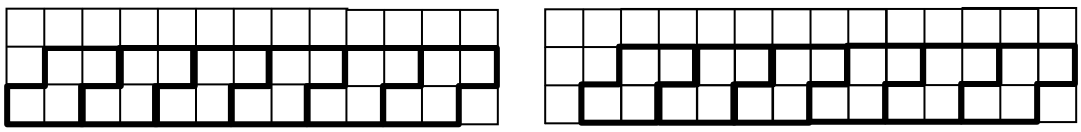
Allgemeine Formel: Wenn n ungerade ist, passen (n-1):2 Figuren rein.

Allgemeine Formel: Wenn n gerade ist, passen (n – 2):2 Figuren rein.

Genau haben wir untersucht: n = 5, dann (5 – 1):2 = 2 Figuren.
n = 8, dann (8 – 2):2 = 3 Figuren.

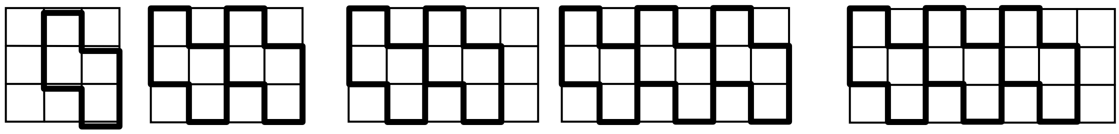
2.2 Untersuchung von n x 3 Rechtecken

Nun haben wir ab dem 3x3 Rechteck untersucht (also 3x3, 4x3, …). Dabei haben wir die Figur zuerst nicht gedreht. Dann sieht das z.B. so aus:



Da man sehen kann, dass die obere Reihe frei bleibt, weiß man, dass man eigentlich die Lösung von den nx2 Rechtecken hat. Durch die obere freie Reihe hat man aber n freie Kästchen mehr.

Wir haben deshalb versucht, die obere Reihe auch zu füllen. Wie rechts abgebildet kann man die Rechtecke nämlich auch senkrecht füllen. Das ermöglicht bei 4x3, 6x3 usw. eine Figur mehr. Aber bei 3x3, 5x3, 7x3 usw. bleiben die Anzahl der freien Kästchen und die Anzahl der Figuren gleich.



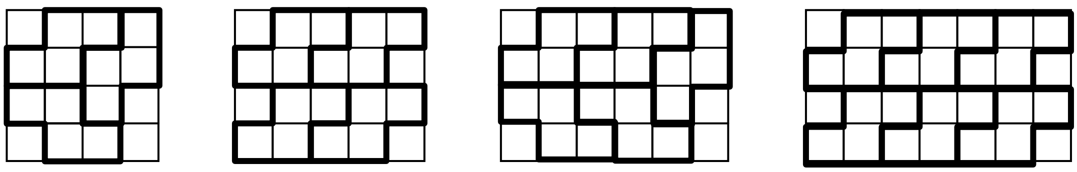
Fügt man die Figuren ohne Ordnung ein, dann erhält man dieselben Ergebnisse wie bei dem senkrechten Beispiel. Es ist also senkrecht am besten.

Allgemeine Formel für (nx3): bei n gerade: (n-0):2
bei n ungerade: (n-1):2

Beispiele für lange Rechtecke: n=110, dann (110-0):2= 55
n=333, dann (333-1):2=166

2.3 Untersuchung von n x 4 Rechtecken

Nun werden wir die nx4 Rechtecke untersuchen. Zuerst haben wir die Figuren waagerecht gelegt:



Dafür folgende Tabelle:

nx4	Anzahl der Figuren	Unterschied	Anzahl der freien Kästchen
4x4	3		4
5x4	4	+1	4
6x4	5	+1	4
7x4	6	+1	4

Dies ist garantiert die beste Lösung, weil immer mindestens an 2 Ecken ein Kästchen frei bleibt. Weil nur vier Kästchen insgesamt frei bleiben und davon 2 in den Ecken liegen, kann man die restlichen freien Kästchen nicht so platzieren, dass eine Figur rein passt.

Allgemeine Formel bei (nx4): bei ungeraden n: (n-1)
bei geraden n: (n-1)

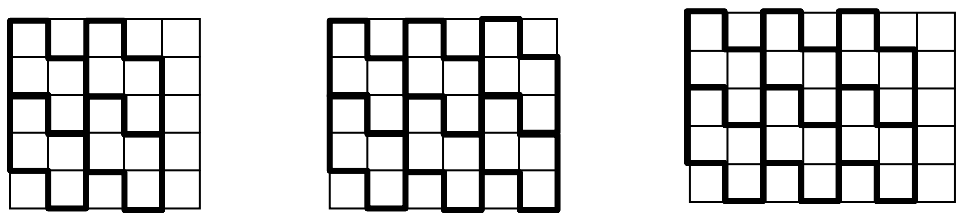
Beim nx4 Rechteck kann man, egal ob gerade oder ungerade, n-1 Figuren reinfügen.

Beispiel: 128-1=127

2.4 Untersuchung von nx5 Rechtecken

Jetzt untersuchen wir die nx5 Rechtecke. Zuerst legen wir die Figuren senkrecht. Dazu folgende Tabelle:

nx5	Anzahl der Figuren	Unterschied	Anzahl der freien Kästchen	Unterschied
5x5	4		9	
6x5	6	+2	4	-5
7x5	6	0	8	+4

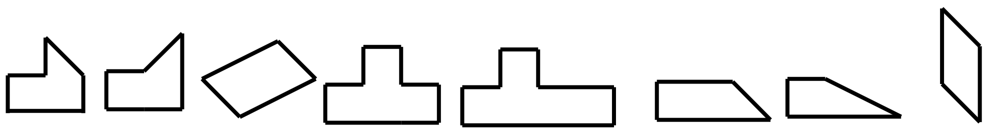


Wie man sieht, bleibt bei ungeradem n eine Reihe frei.

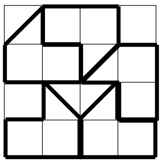
Allgemeine Formel: bei gerade: (n-0)
bei ungerade: (n-1)

3. Parkettierung mit anderen Figuren

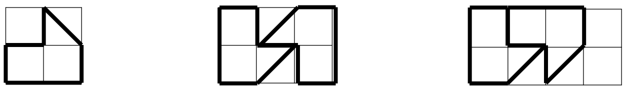
Wir wollen für das nächste Heft vielleicht noch andere Figuren ausprobieren, zum Beispiel:



Ein 4x4 Quadrat haben wir schon mal gefüllt:



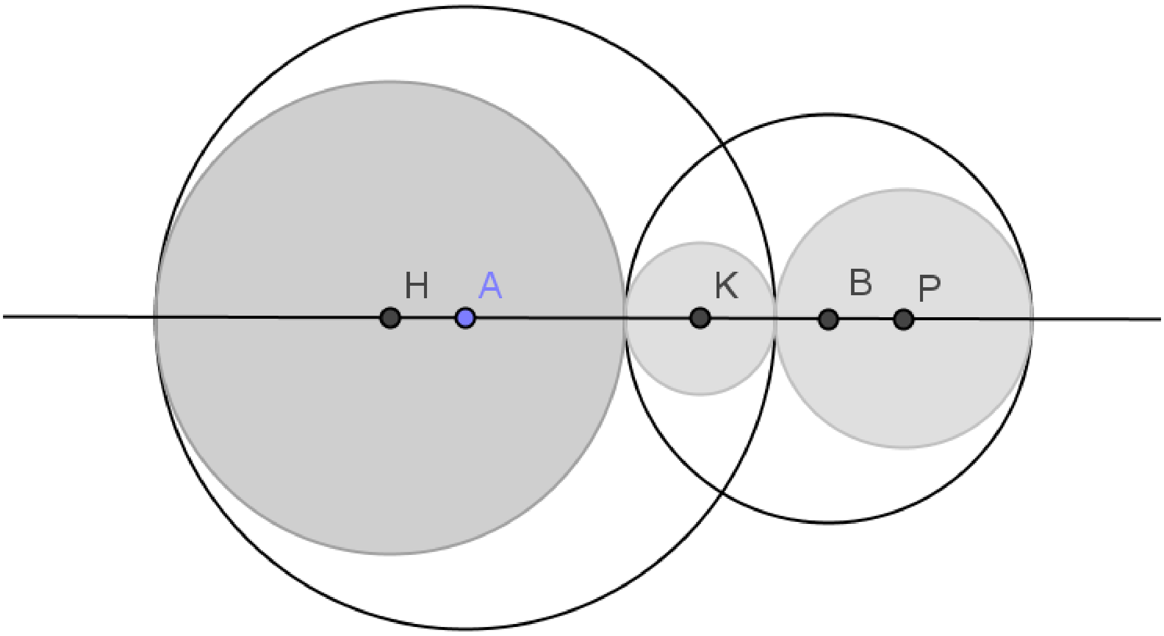
Bis zum Wettbewerb wollen wir Rechtecke systematisch untersuchen:



Kreise mit Kreisen

1. Erinnerung

In unserer Arbeit untersuchen wir die Flächeninhalte von Kreisen die in anderen Kreisen stecken. Dabei haben die Mittelpunkte von zwei Kreisen voneinander den Abstand c und die beiden Kreise selbst haben die Radien a und b. In die drei entstehenden Felder werden wieder Kreise eingezeichnet (grau).



Diese haben die Radien h, k und p (der Einfachheit halber sagen wir auch Kreis h, wenn wir den Kreis mit Radius h meinen).

Jetzt geht es darum, welche Bedingungen für a, b und c gelten müssen, damit die Fläche des linken grauen Kreises so groß ist wie die der anderen beiden Kreise zusammen.
Mit Hilfe von Geogebra hatte einer von uns – Moritz – im letzten MadMax folgende Näherungslösung gefunden:
Mit a = 2, b = 1,7 und c = 2 erhält man für den Kreis h die Fläche 4,15, für den Kreis k die Fläche 2,27 und für den Kreis p die auch die Fläche 2,27. Wir haben nun versucht, mit Hilfe von Formeln bessere Lösungen für das Ausgangsproblem zu finden.

2. Lösung mit Formeln

Aus der Zeichnung kann man folgende Gleichungen entnehmen:

I.	a + b + c	=	2h + 2k + 2p
II.	2a	=	2h + 2k
III.	2b	=	2k +2p

Aus diesen Formeln bzw. Regeln kann man die Formeln für h, p und k erschließen.
Zum Beispiel aus Gleichung I. – Gleichung II. :

I. – II.: – a + b + c = 2p

Also ist: $p = \frac{(b+c-a)}{2}$

I. – III.: a – b + c = 2h

Also ist: $h = \frac{(a+c-b)}{2}$

In II.: 2 a = $2 \cdot \frac{(a+c-b)}{2}$ + 2k

Also ist: $k = \frac{(a+b-c)}{2}$

Wir setzen diese Ergebnisse jetzt in die Bedingung $A_h = A_k + A_p$ für die Kreise ein,

um Werte für a, b und c zu erhalten bei der das gilt:

$$A_h = A_k + A_p$$

$$\Leftrightarrow \pi \cdot h^2 = \pi \cdot k^2 + \pi \cdot p^2$$

$$\Leftrightarrow \pi \cdot \left(\frac{a+c-b}{2} \right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{a+b-c}{2} \right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{b+c-a}{2} \right)^2 \quad \Big| : \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+c-b)^2}{4} = \frac{(a+b-c)^2}{4} + \frac{(b+c-a)^2}{4} \quad \Big| \cdot 4$$

⇔ (a + c – b)² = (a + b - c)² + (b + c– a) ²

Nun versuchen wir durch eine Rechnung den Fall 2 : 1 : 1 für die Flächeninhalte der Kreise zu bekommen. Dafür haben wir wie am unten angegebenen Beispiel a und c selber gewählt und ein passendes c mit der Bedingung berechnet:

Beispiel 1: a = 2 und c = 2

(2 + 2 – b)² = (2 + b – 2)² + (b + 2 – 2)² | T

⇔ (4 – b)² = 2b² | $\sqrt{}$

⇔ 4 – b = $\sqrt{2} \cdot b$ | +b

⇔ 4 = $\sqrt{2} \cdot b + b$ | T

⇔ 4 = $\left(\sqrt{2}+1\right) \cdot b$ | $:\left(\sqrt{2}+1\right)$

⇔ $b = \frac{4}{\sqrt{2}+1} \approx 1{,}656854$

Oder:

⇔ 16 – 8b +b² = 2b² | – b² - 16 + 8b

⇔b² + 8b – 16 = 0

⇔ $b = -4 + \sqrt{16 - (-16)} = -4 + \sqrt{32} = -4 + \sqrt{2 \cdot 16}$

Es gibt immer auch eine zweite Lösung, allerdings ist diese negativ und kann deshalb kein Radius für einen Kreis sein.

Beispiel 2: a=3 und c=2

$(3 + 2 - b)^2 = (3 + b - 2)^2 + (b + 2 - 3)^2$ | T

⇔ ***$(5-b)^2 = (1+b)^2 + (b-1)^2$ | B***

⇔ $(5-b)\cdot(5-b) = (1+b)\cdot(1+b) + (b-1)\cdot(b-1)$ | T

⇔ $25 - 10b + b^2 = 1 + 2b + b^2 + b^2 - 2b + 1$ | T

⇔ $25 - 10b + b^2 = 2 + 2b^2$ |$-b^2 + 10b - 25$

⇔ $0 = b^2 + 10b - 23$ | T

⇔ $b = -5 + \sqrt{25 - (-23)}$ | T

⇔ $b = -5 + \sqrt{48} \approx 1{,}92820323$

⇔ $b = 1{,}92820323$

Beispiel 3: a=4 und c=2

$(4+2-b)^2 = (4+b-2)^2 + (2+b-4)^2$ | T

⇔ $(6-b)^2 = (2+b)^2 + (b-2)^2$ | T

⇔ $36-12b+b^2 = 8+2b^2$ | $+12b - b^2 - 36$

⇔ $0 = b^2+12b-28$ | T

⇔ $b = -6 + \sqrt{36-(-28)}$ | T

⇔ $b = -6 + \sqrt{64}$

⇔ $b = 2$

3. Ausblick

In unseren Beispielen fällt auf, dass in Bsp 1 a = 2 und vor der Wurzel 2+2=4 steht, in Bsp 2 a = 3 und vor der Wurzel 3+2=5 und in Bsp 3 a = 4 und vor der Wurzel

4+2=6. Außerdem fällt auf, dass die Wurzeln ebenfalls einem Muster folgen: Bsp 1: $\sqrt{32}$,Bsp 2: $\sqrt{48}$ und Bsp 3: $\sqrt{64}$

Nun können wir durch diese Beispiele ein Muster erkennen: $b = -(a+c) + \sqrt{a \cdot 16}$.

Nun haben wir mit Geogebra die Formel weiter vereinfacht.

$(a+c-x)^2=(a+x-c)^2+(x+c-a)^2$

Lösung:

{x = (-a) - c - ((2 * sqrt(2)) * sqrt((a * c))), x = (-a) - c + ((2 * sqrt(2)) * sqrt((a * c)))}

Dieses Ergebnis wollen wir noch genauer untersuchen.

Terme umformen

Heute: Kürzen mit n

$$\frac{1}{n} \cdot \sin x = \frac{1}{1} \cdot si\ x = six = 6$$