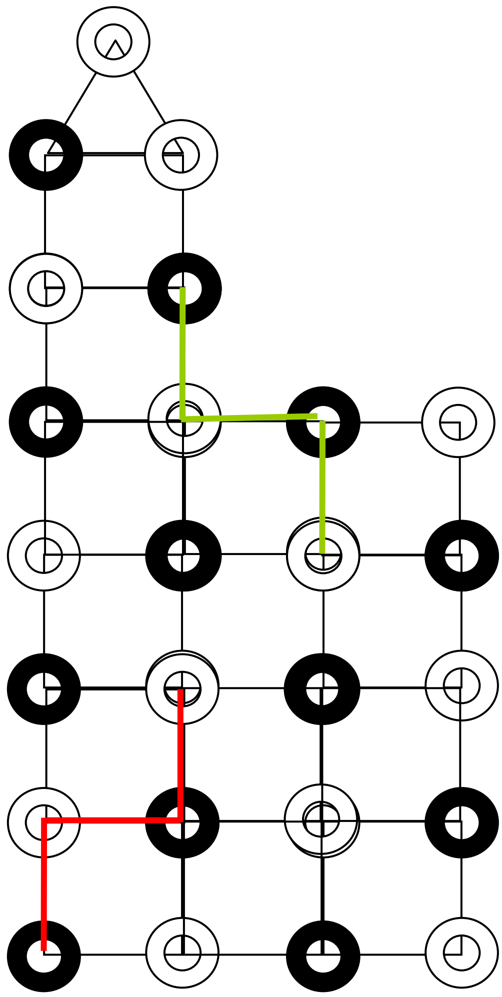
The MadMax



zeitung für mathematik am mpg trier / heft 34 / juli 2014

Liebe MadMax – Freunde,

zum Schuljahresende haben wir wieder ein abwechslungsreiches Heft für euch gestaltet. Beim Lesen der sechs Artikel könnt ihr euch diesmal wieder mit geometrischen Spielereien beschäftigen. Aber wir haben auch „Buchstaben versteckt“ und ordentlich „Remmidemmi“ gemacht.

Viel Spaß mit unserem Heft wünscht Euch Euer

MadMax –Team

Remmidemmi

(Idee aus „Mathematik ohne Grenzen 2007“)

1. Einleitung

In unserem Thema bearbeiten wir folgendes Problem: Wir haben ein dreieckförmiges Hochhaus mit vielen Stockwerken und vielen Wohnungen. Der Bewohner der Wohnung 2007 beklagt sich über den lärmenden Bewohner über ihm. Nun haben wir uns gefragt, in welcher Wohnung sich der Störenfried befindet?

					1				
				2	3	4			
			5	6	7	8	9		
		10	11	12	13	14	15	16	
	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27								

usw. ……..

2. Regeln für die Bestimmung des Stockwerkes

Wir haben uns überlegt, ob es Regeln für die übereinanderliegenden Wohnungen gibt oder für die, die ganz rechts liegen. Damit wollen wir herausfinden, in welchem Stockwerk der Bewohner und der Störenfried wohnen.

2.1 Die Nummern der rechts liegenden Wohnungen

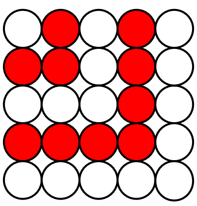
Uns ist aufgefallen, dass die Nummern der Wohnungen ganz rechts immer Quadratzahlen sind. Das wollen wir erklären.

Wenn man einzeln die Anzahl der Wohnungen in den Stockwerken zählt, erhält man immer eine ungerade Zahl, weil immer zwei Wohnungen dazu kommen. In einer Tabelle haben wir das dargestellt (die Etagen haben wir von oben nach unten durchnummeriert):

Etage	Rechnung	Ergebnis
1	1	1
2	1 + 3	4
3	1 + 3 + 5	9
4	1 + 3 + 5 + 7	16
5	1 + 3 + 5 + 7 + 9	25

In der 3. Etage liegt also rechts die Wohnung $3^2 = 9$, in der 4. Etage die Nummer $4^2 = 16$ usw.

Wenn das stimmt, dann müsste also 1 + 3 + 5 + 7 + … immer eine Quadratzahl sein. Das kann man mit einer Zeichnung zeigen. Wenn zu dem ersten weißen Kreis 3 rote Kreise dazu kommen, dann bekommt man ein Quadrat mit 2 x 2 Kreisen. Wenn dann fünf weiße Kreise



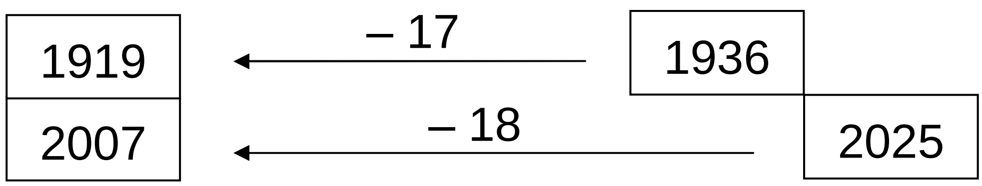
dazukommen, bekommt man ein 3 x 3 Quadrat usw. Also, wenn immer eine nächst größere, ungerade Zahl zu dem Quadrat dazu kommt, dann bekommt man wieder ein Quadrat und die Anzahl der Kreise ist deshalb eine Quadratzahl. Deshalb ist die Wohnungsnummer der rechten Wohnung immer eine Quadratzahl.

2.2 Die Nummern untereinander liegender Wohnungen

Bei einer Wohnungsnummer in der Mitte wird die darunterliegende Wohnungsnummer größer. Zum Beispiel bei Wohnungsnummer (1 → 3) kommen zwei dazu. Bei (3 → 7) kommen vier dazu und bei (7 → 13) kommen sechs dazu. Das geht so weiter, aber man kann nicht gut herausfinden, wie man zur Wohnung 2007 und der darüber kommt. Deshalb haben wir anders angefangen.

2.3 Unsere Lösung

Unsere Lösung für das Problem mit dem Störenfried lautet 1919. Das haben wir uns so überlegt:



Der Bewohner wohnt in der Wohnung 2007, und die nächst größere Quadratzahl ist 2025 im 45. Stock. Der Bewohner in der Wohnung mit der Nummer 2007 wohnt also 18 Wohnungen weiter links von Nummer 2025. Deshalb wohnt der Störenfried nur 17 Wohnungen weiter links von 44 x 44 =1936, d.h. in der Nummer 1919.

2.4 Wir untersuchen von unten nach oben

In folgenden Beispielen haben wir noch weitere Wohnungen untersucht. Wo wohnt z.B. der Störenfried, wenn der Bewohner in Wohnung 2014 wohnt?

$$\boxed{1926} \xleftarrow{\;-10\;} \boxed{1936}$$

$$\boxed{2014} \xleftarrow{\;-11\;} \boxed{2025}$$

Oder in 3333:

$$\boxed{2769} \xleftarrow{\;-267\;} \boxed{3036}$$

$$\boxed{3333} \xleftarrow{\;-268\;} \boxed{3619}$$

Wie man sieht, muss man nur die nächst größere Quadratzahl suchen. Man muss die Differenz von den Zahlen 3619 und 3333 bilden. Dann ist die Differenz von 3036 und 2769 eine Ziffer weniger als von der Differenz von 3619 und 3333.

Wer wohnt zwei Stockwerke über der 2014? Das machen wir genauso in zwei Schritten:

$1840 \xleftarrow{-9} 1849$

$1926 \xleftarrow{-10} 1936$

$2014 \xleftarrow{-11} 2025$

Wir haben zum Schluss noch die letzte Wohnung über 2014 gesucht. Dabei sind wir mit Hilfe einer Tabelle zu folgendem Ergebnis gekommen:

Stockwerk	Rechnung	Wohnung
45	-11	$45^2 - 11 = 2014$
44	-10	$44^2 - 10 = 1926$
43	-9	$43^2 - 9 = 1840$
42	-8	$42^2 - 8 = 1756$
41	-7	$41^2 - 7 = 1675$
40	-6	$40^2 - 6 = 1594$
39	-5	$39^2 - 5 = 1516$
38	-4	$38^2 - 4 = 1440$
37	-3	$37^2 - 3 = 1366$
36	-2	$36^2 - 2 = 1294$
35	-1	$35^2 - 1 = 1224$
34	-0	$34^2 - 0 = 1156$

Die gesuchte Zahl heißt 1156. Sie ist dann auch eine Quadratzahl.

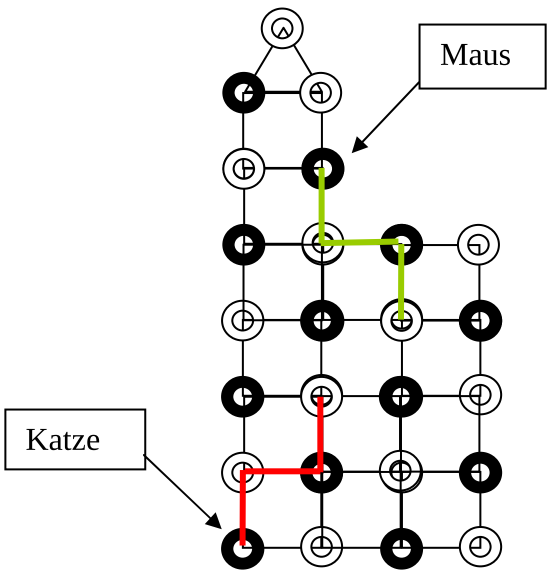
Katz und Maus

(aus: Mathematik ohne Grenzen 2007)

1. Das Problem, die Maus zu fangen

Eine Maus hat sich in einer „Kirche“ versteckt, die wie ein Gitter aufgebaut ist. Die Katze versucht die Maus in diesem Gitter zu fangen. Jedes der beiden Tiere geht abwechselnd einen Schritt im Gitter. Die Katze macht den ersten Schritt. Wir versuchen herauszufinden, ob die Katze die Maus fangen kann. Und wenn ja, dann wie?

Im Beispiel haben beide Tiere drei Schritte gemacht:

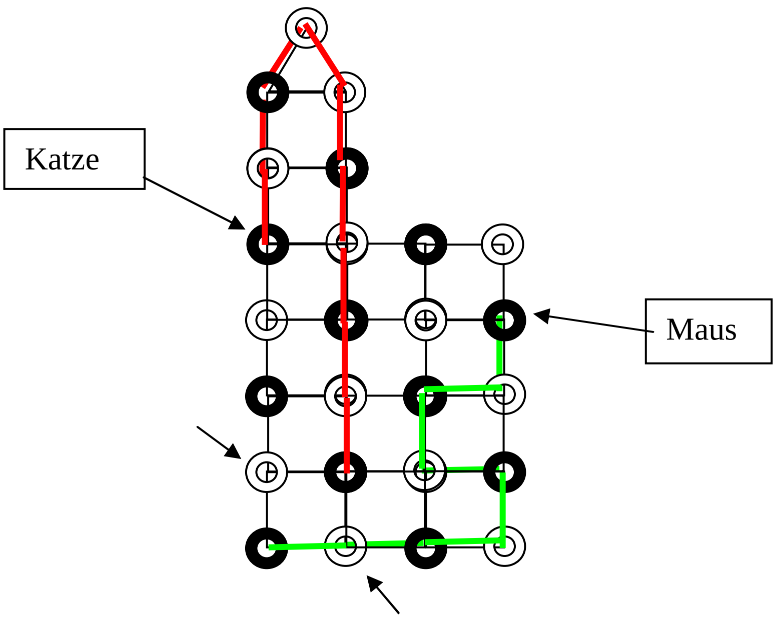


2. Warum die Katze die Maus nicht fangen kann

Die Katze kann die Maus eigentlich nicht fangen, da am Start beide auf einem schwarzen Feld sind. Im ersten Schritt muss die Katze auf ein weißes, wo die Maus nicht sein kann. Jetzt geht die Maus auf ein weißes Feld und wenn die Katze den nächsten Schritt macht, muss sie wieder auf ein schwarzes Feld und da ist die Maus ja wieder nicht.

3. Und so kann die Katze die Maus überlisten

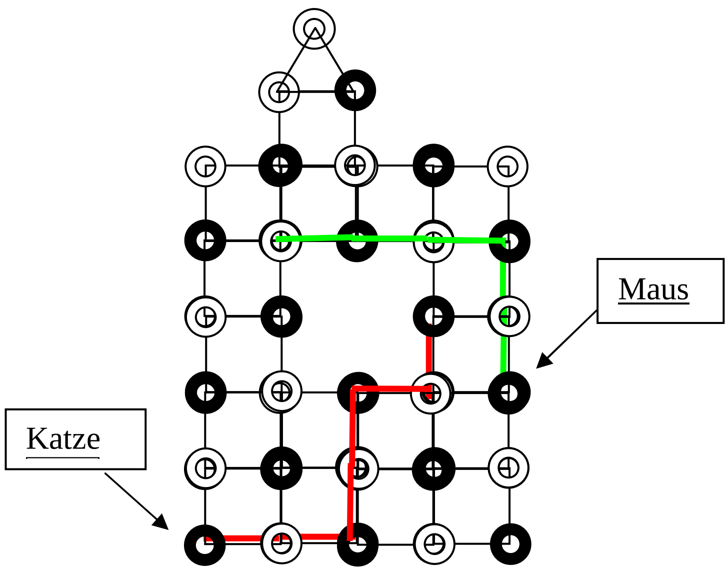
Wenn die Katze einmal über den Kirchturm läuft, geht sie zweimal hintereinander auf ein weißes Feld. Dabei muss die Maus als erstes auf ein weißes Feld gehen und dann auf ein schwarzes. Dann kommt die Katze im nächsten Schritt auf ein schwarzes Feld, wo die Maus sitzen könnte. Wenn dann die Katze es geschafft hat, die Maus in die Ecke zu locken, dann muss (wie im



unteren Beispiel) die Maus irgendwo hingehen. Jetzt ist es egal wohin die Maus geht. Die Katze kann die Maus fangen. Die Katze muss nur aufpassen, dass die Maus zwischendurch nicht auch über den Turm läuft.

4. Wir bauen ein anderes Haus

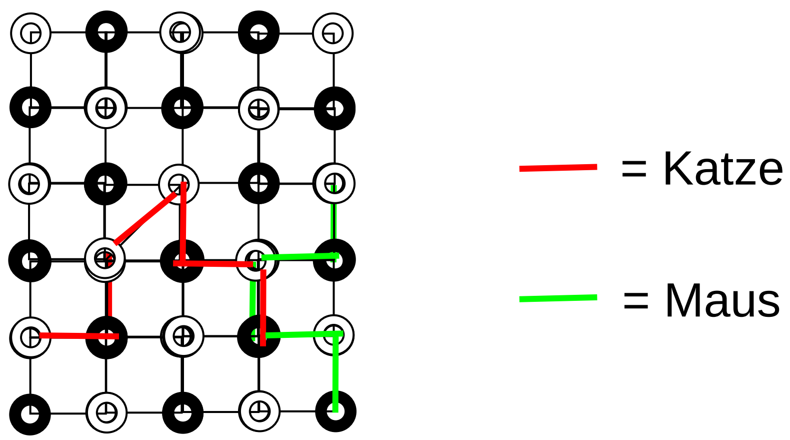
Das wollen wir jetzt bei einem anderen Haus untersuchen. Wir haben ein Haus gebaut, das ein Fenster und eine Turmspitze beinhaltet. Für die Katze ist es gut, dass es eine Turmspitze gibt, da sie dadurch zwei mal hintereinander auf ein weißes Feld tritt. Schlecht ist jedoch, dass die Maus das Fenster umrunden kann, ohne dass die Katze sie erwischt.



Man sieht, dass die Katze der Maus nur hinterherlaufen kann. Wenn es kein Fenster gäbe, könnte die Katze die Maus wie im ersten Beispiel in die Ecke treiben und sie somit mühelos fangen.

5. Worauf es wirklich ankommt

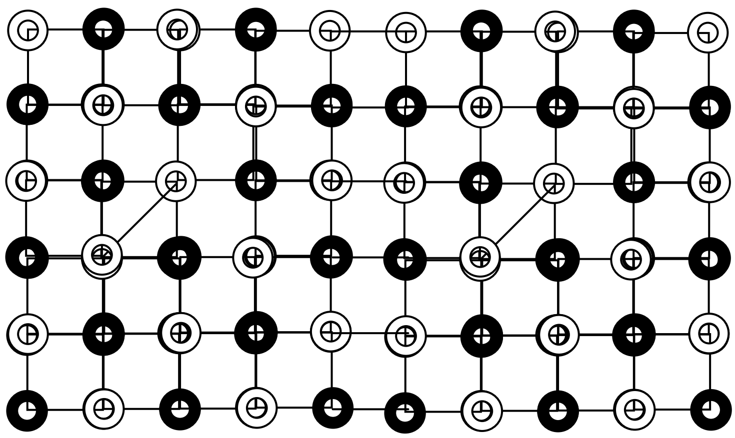
Wir haben uns gefragt, ob es immer ein Türmchen sein muss, damit die Katze die Maus fangen kann. Wichtig ist nur, dass es irgendwo im Feld eine Diagonale gibt. Über die kann die Katze dann von weiß auf weiß und die Maus fangen. Sie muss nur darauf achten, dass die Maus es nicht auch macht.



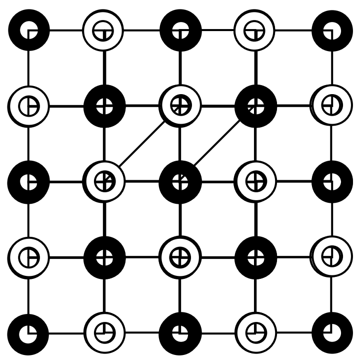
Die Katze kann die Maus fangen, da wie beim Turm auf ein weißes Feld ein weißes Feld folgt. In unserem Beispiel kann sich die Maus nach dem sechsten Schritt der Katze nicht mehr bewegen, ohne beim nächsten Schritt gefangen zu werden.

6. Hier hat die Katze keine Chance

Im folgenden Haus haben wir eine zweite Diagonale eingebaut. Dann hat die Katze keine Chance, weil auch die Maus die Farbe wechseln kann:



Aufpassen muss die Maus nur, wenn das Haus sehr klein ist, oder die Diagonalen nahe bei einander liegen:

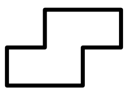


Parkettierung von Rechtecken mit einfachen Figuren

(Idee aus: Wettbewerb Känguru, 2013, Klassenstufen 7 und 8)

1. Einleitung

Wir wollen ein System entwickeln, in dem es um das Füllen von Rechtecken mit einfachen Figuren geht. Dabei können die Rechtecke eine beliebige Größe haben. Als einfache Figur verwenden wir:



Die Figuren können gedreht oder gespiegelt werden:

Wir versuchen so viele Figuren wie möglich in ein Rechteck zu bekommen.

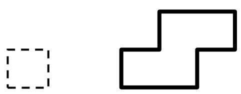
Damit setzen wir die Untersuchung von Zoe Harder und Mariano Festa aus dem MadMax 33 fort, in der sie nur Quadrate untersucht haben. Mit dieser Arbeit haben sie auch am Wettbewerb „Schüler experimentieren 2013/2014“ teilgenommen.

2. Bekannte Ergebnisse aus der Vorgängerarbeit

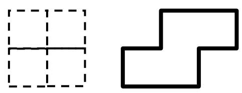
Wir zeigen jetzt die bekannten besten Lösungen aus der alten Arbeit.

Bei einem 1x1Quadrat und einem 2x2 Quadrat passt die Figur nicht hinein:

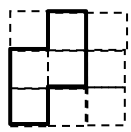
1x1 Quadrat :



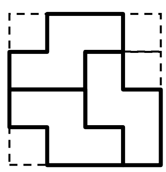
2x2 Quadrat :



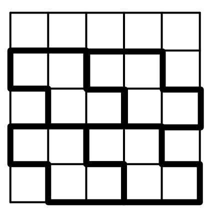
In ein 3 x 3 Quadrat passt die Figur nur einmal rein, egal wie man sie dreht oder wendet. Es bleiben 5 Kästchen übrig:



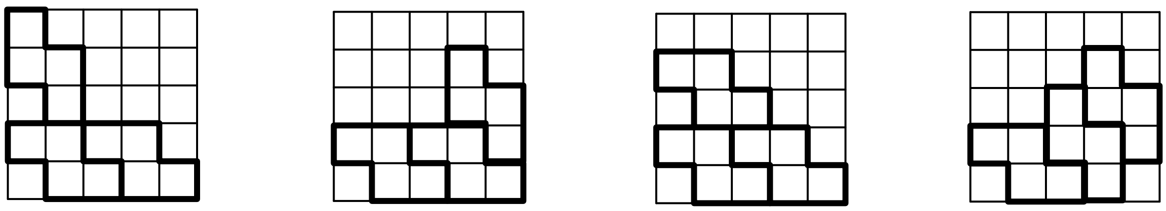
Und das ist die beste Lösung für ein 4 x 4 Quadrat:



Die Lösung für das 5x5 Quadrat besprechen wir etwas genauer, weil man da die Probleme beim Lösen gut zeigen kann:

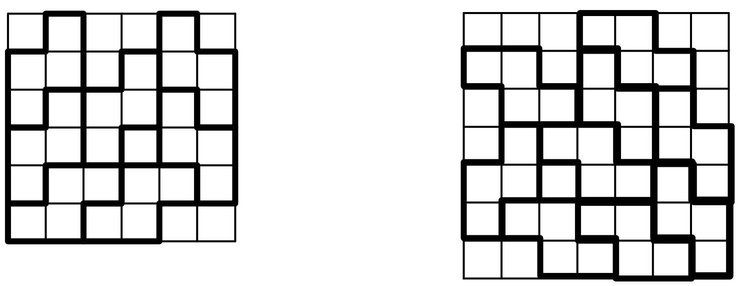


In das 5x5 Quadrat können wir regelmäßig 4 Figuren einfügen und es bleiben 9 Kästchen frei. In die übrigen 9 freien Kästchen könnte man noch 2 weitere Figuren einfügen. Auch wenn man anders startet, passen nicht mehr Figuren hinein:



Wie im oberen Bild zu sehen ist, bleibt nach 3 Figuren noch sehr viel Platz frei. Allerdings kann man immer nur noch eine Figur einfügen. Mehr als 4 geht also nicht. Das erste Beispiel ist also schon die beste Lösung für ein Quadrat mit dieser Größe.

Weitere „beste" Lösungen zeigen die folgenden Zeichnungen für 6 x 6 und 7 x 7:



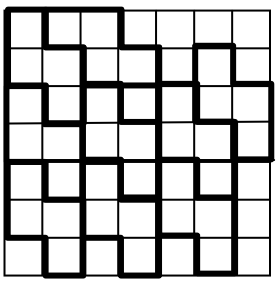
Die Tabelle gibt einen Überblick:

Quadratgröße n x n	Anzahl der Figuren	Freie Kästchen
1	0	1
2	0	4
3	1	5
4	3	4
5	4	9
6	7	8
7	9	13
8	12	16
9	16	17

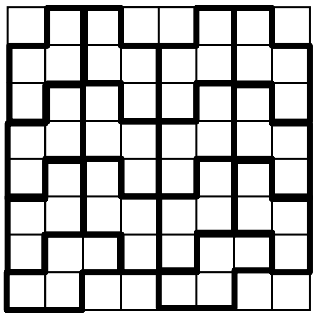
Die Ergebnisse für 8 und 9 waren nur regelmäßige Parkettierungen und bei 7 sind sehr viele Kästchen frei gewesen. Deshalb versuchen wir jetzt zuerst, ob es noch besser geht.

3. Ergänzende Untersuchungen ab n = 7

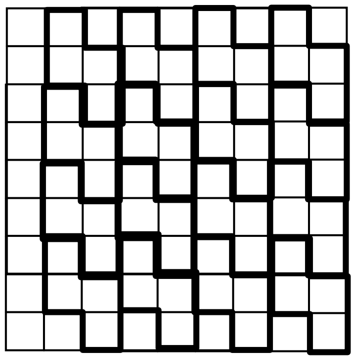
Ab dem 7x7 Quadrat haben wir bessere Lösungen gesucht.



Wie oben zu sehen, haben wir für das 7x7 Quadrat leider keine bessere Lösung gefunden. Deshalb haben wir es mit 8x8 versucht:



Bei dem Quadrat 8x8 haben wir eine bessere Lösung: 14 Figuren und 8 freie Kästchen. Das sind zwei Figuren mehr als vorher.



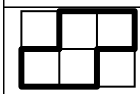
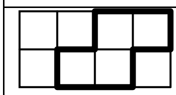
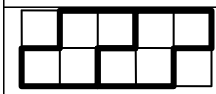
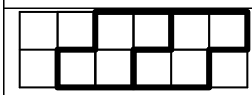
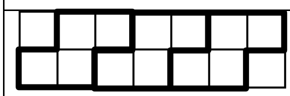
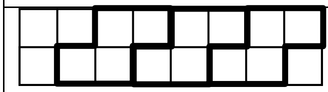
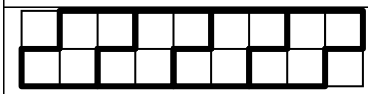
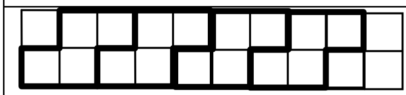
Oben sieht man das Ergebnis für das 9x9 Quadrat aus dem letzten Jahr und leider konnten wir auch nichts besseres finden.

Wir konnten also leider nur bei dem 8x8 Quadrat ein besseres Ergebnis finden: Wir konnten 2 Figuren mehr einfügen und 4 freie Kästchen bedecken.

4. Systematische Untersuchung von Rechtecken

Wir untersuchen nun Rechtecke. Da ein Rechteck mindestens 3x2 Einheiten groß sein muss, um mindestens eine unserer Figuren hinein zu legen, zeigen wir als kleinstes Rechteck ein 3x2 Rechteck.

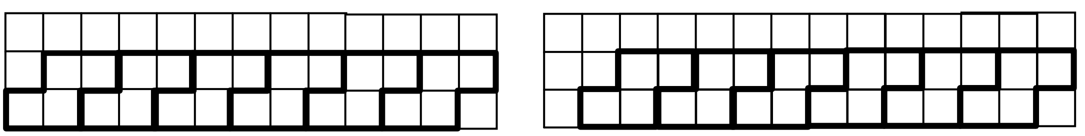
4.1 Untersuchung von n x 2 Rechtecken

Figur	Anzahl Figuren	Ände-rung	Anzahl freie Käst-chen	Ände-rung
	1		2	
	1	+0	4	+2
	2	+1	2	-2
	2	+0	4	+2
	3	+1	2	-2
	3	+0	4	+2
	4	+1	2	-2
	4	+0	4	+2

Da man hier die Figuren nur horizontal einfügen kann, haben wir immer nur abwechselnd 2 und 4 freie Kästchen gehabt. Die Anzahl der Figuren wechselt, wie oben zu sehen, immer nach jeder zweiten Figur.
Bei den Figuren 3x2, 5x2, 7x2, … sieht man in der Tabelle, dass nur 2 Kästchen frei bleiben. Bei 4x2, 6x2, 8x2, … bleibt eine ganze vertikale Reihe frei. Also 4 freie Kästchen insgesamt. Dennoch kann man keine weitere Figuren einfügen, denn man kann die 4 freien Kästchen nicht so zusammenlegen, dass man eine weitere Figur einfügen kann.

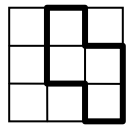
4.2 Untersuchung von n x 3 Rechtecken

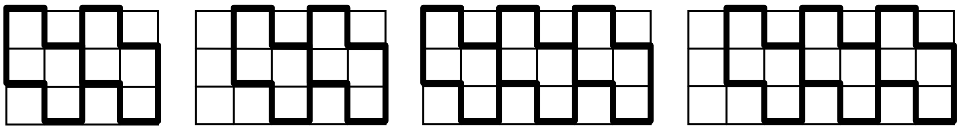
Nun haben wir ab dem 3x3 Rechteck untersucht (also 3x3, 4x3, …). Dabei haben wir die Figur zuerst nicht gedreht. Dann sieht das z.B. so aus:



Da man sehen kann, dass die obere Reihe frei bleibt, weiß man, dass eigentlich die Lösung von den nx2 Rechtecken hat. Durch die obere freie Reihe hat man aber n freie Kästchen mehr.

Wir haben deshalb versucht, die obere Reihe auch zu füllen. Wie rechts abgebildet kann man die Rechtecke nämlich auch senkrecht füllen. Das ermöglicht bei 3x4, 3x6 usw. eine Figur mehr. Aber bei 3x3, 3x5, 3x7 usw. bleibt die Anzahl der freien Kästchen und die Anzahl der Figuren gleich.

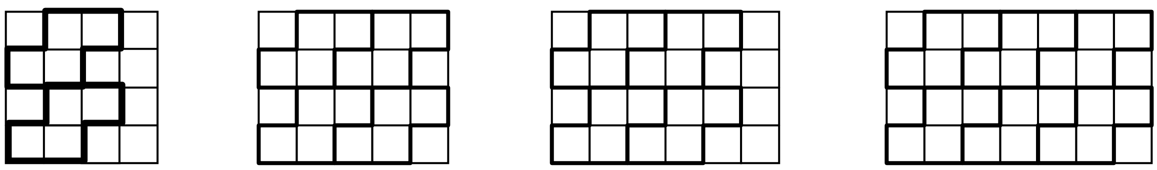




Fügt man die Figuren ohne Ordnung ein, dann erhält man dieselben Ergebnisse wie bei dem senkrechten Beispiel. Es ist also senkrecht am besten.

4.3 Untersuchung von 4xn Rechtecken

Nun werden wir die 4xn Rechtecke untersuchen. Zuerst haben wir die Figuren waagerecht gelegt:

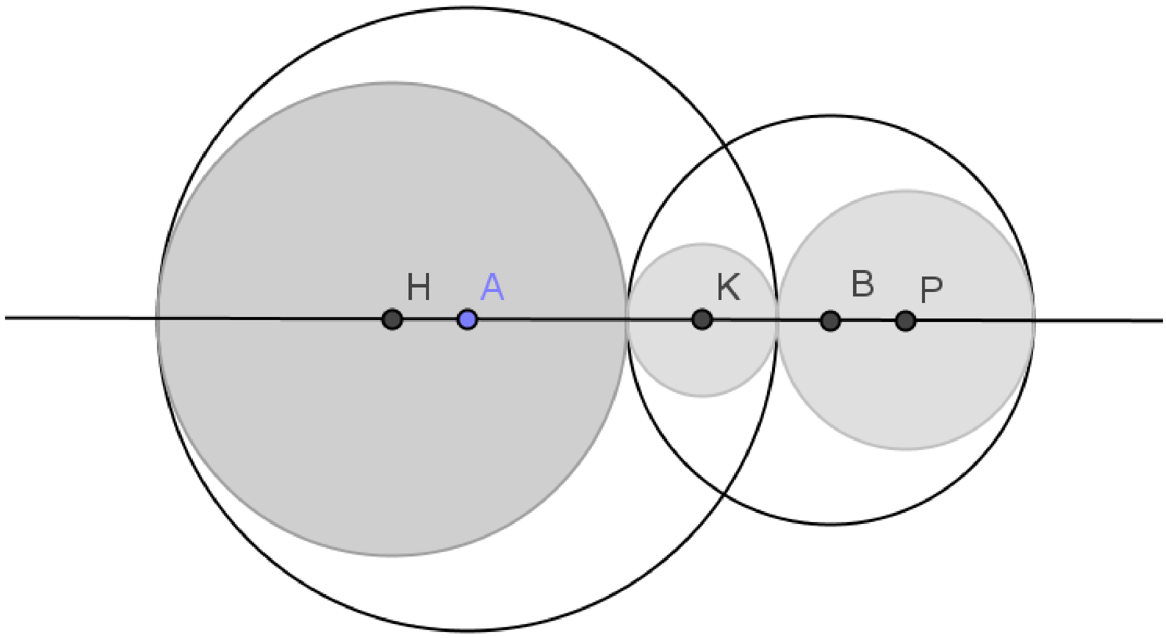


Hier erhält man das Ergebnis von den nx2 Rechtecken doppelt, wenn man regelmäßig mit liegenden Figuren füllt. Das wollen wir bis zum nächsten MadMax noch genauer untersuchen.

Kreise mit Kreisen

1. Vergleich von Kreisflächen

In unserer Arbeit führen wir eine Arbeit aus dem letzten Heft fort und untersuchen die Flächeninhalte von Kreisen die in anderen Kreisen stecken. Dabei haben die Mittelpunkte von zwei Kreisen voneinander den Abstand c und die beiden Kreise selbst haben die Radien a und b. In die drei entstehenden Felder werden wieder Kreise eingezeichnet (grau).

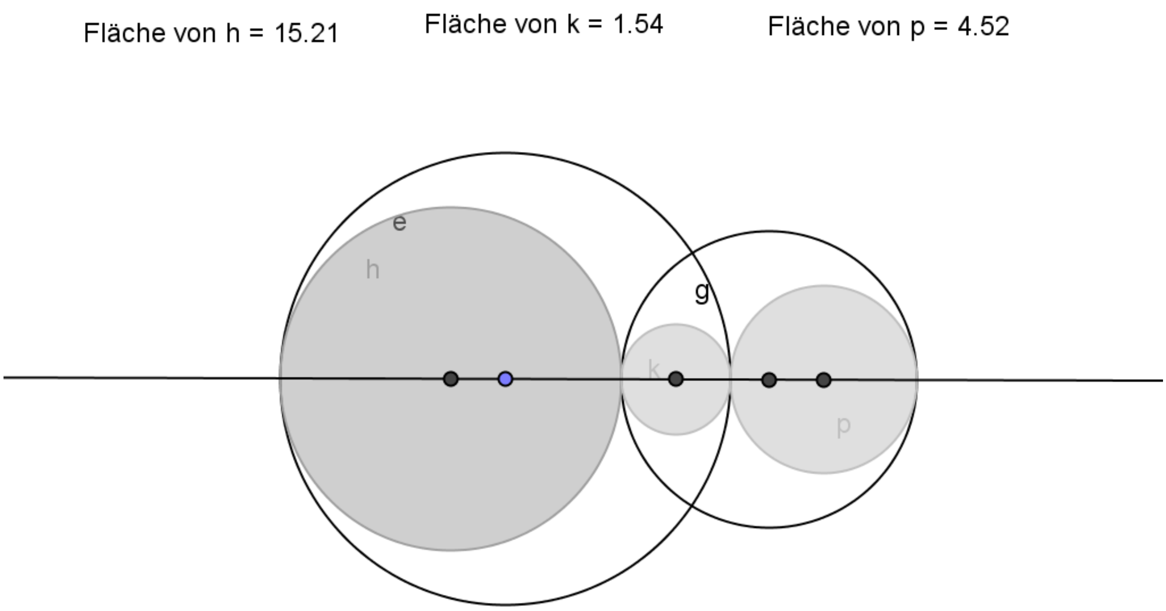


Diese haben die Radien h, k und p (der Einfachheit halber sagen wir auch Kreis h, wenn wir den Kreis mit Radius h meinen).

Jetzt geht es darum, welche Bedingungen für a, b und c gelten müssen, damit die Fläche des linken grauen Kreises so groß ist wie die der anderen beiden Kreise zusammen.

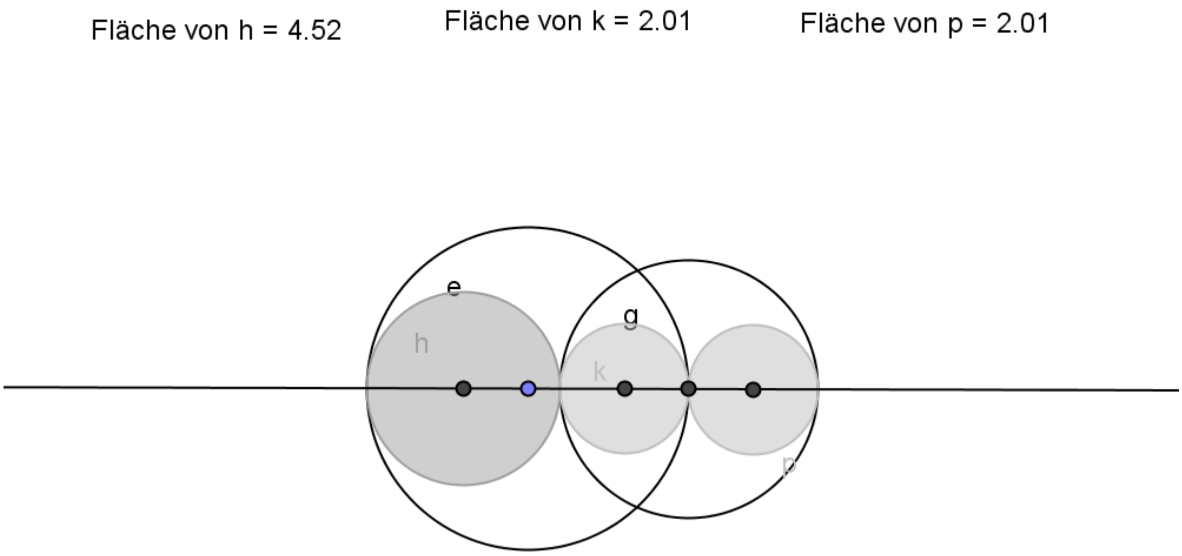
2. Veränderung der Radien und Beobachtung der Wirkung

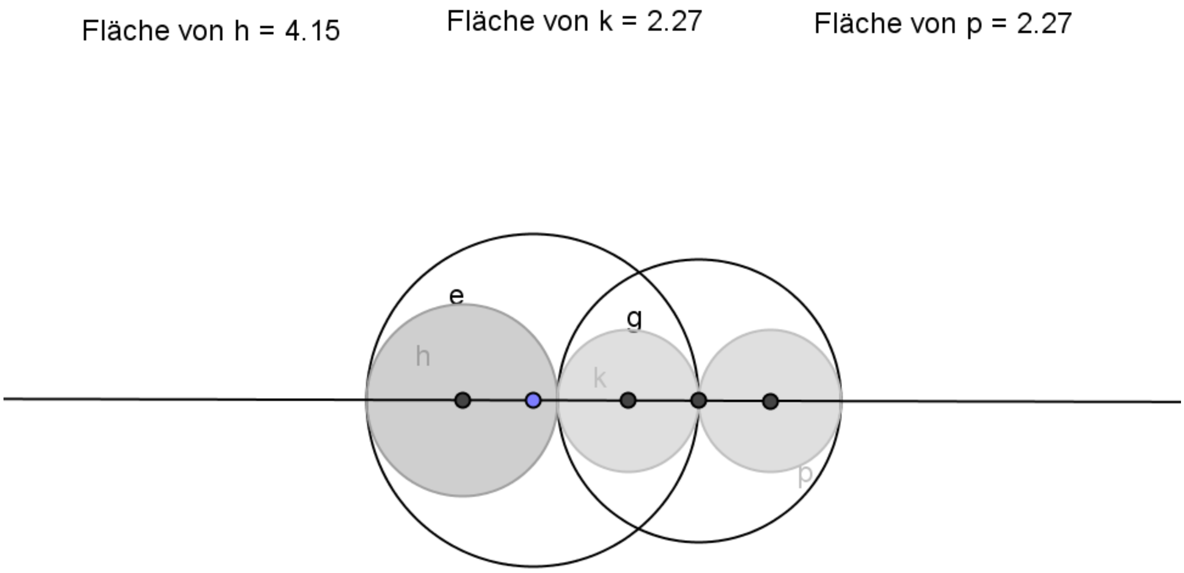
Hierfür haben wir eine Datei in Geogebra erstellt, in der wir die Abstände mit Schiebern verändern können. Die Flächeninhalte werden automatisch gemessen.



3. Lösung des Problems mit Geogebra

Durch ausprobieren und verändern der Werte von a, b und c mit den Schiebern haben wir zwei Näherungslösungen gefunden:





4. Lösung mit Formeln

Diese Näherungslösungen wollen wir rechnerisch bestätigen. Aus der Zeichnung kann man folgende Gleichungen entnehmen:

$$
\begin{array}{rl}
\text{I.} & a + b + c = 2h + 2k + 2p \\
\text{II.} & 2a = 2h + 2k \\
\text{III.} & 2b = 2k + 2p
\end{array}
$$

Aus diesen Formeln bzw. Regeln kann man die Formeln für h, p und k erschließen. Zum Beispiel aus Gleichung I. – Gleichung II. :

I. – II.: $-a + b + c = 2p$

Also ist: $p = \frac{(b + c - a)}{2}$

I. – III.: $a - b + c = 2h$

Also ist: $h = \frac{(a + c - b)}{2}$

In II.: $2a = 2 \cdot \frac{(a+c-b)}{2} + 2k$

Also ist: $k = \frac{(a+b-c)}{2}$

Wir setzen diese Ergebnisse jetzt in die Bedingung

$A_h = A_k + A_p$ für die Kreise ein, um Werte für a, b und c

zu erhalten bei der das gilt:

$$\left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2$$

Wenn man beide Seiten mit 4 multipliziert, erhält man:

$$(a+c-b)^2 = (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 .$$

Setzt man z.B. a = c = 2, dann erhält man:

$(2 + 2 – b)^2 = (2 + b – 2)^2 + (b + 2 – 2)^2$ | T

⇔ $(4 – b)^2 = 2b^2$ | $\sqrt{\;}$

⇔ $4 – b = \sqrt{2} \cdot b$ | +b

⇔ $4 = \sqrt{2} \cdot b + b$ | T

⇔ $4 = \left(\sqrt{2}+1\right) \cdot b$ | $:\left(\sqrt{2}+1\right)$

⇔ $b = \frac{4}{\sqrt{2}+1} \approx 1{,}65685$

Mit Geogebra kann man überprüfen, dass das eine Lösung für unser Ausgangsproblem ist. Wir wollen versuchen, noch weitere Lösungen zu finden.

Buchstaben verstecken

1. Einleitung

Es geht darum, dass eine Gruppe von Menschen einen Text vorgelegt bekommt und ihn einmal durchlesen darf. Dabei soll man einen bestimmten Buchstaben zählen. In dem folgenden Text soll man z.B. zählen, wie oft der Buchstabe „F” vorkommt.

Beispiel:

FINISHED FILES ARE THE

RESULT OF YEARS OF SCIENTIFIC

STUDY COMBINED WITH THE

EXPERIENCE OF YEARS

Ihr könnt selbst auch zählen. Wie viele „F“ zählt ihr? Zählt ihr drei? Vier?

Es gibt sechs „F“. Die meisten Leute zählen weniger, viele sogar nur drei „F“ (vgl. http://www.kik-seminare.at/experimente/ftest.htm, Juni 2014). Wenn ihr auch auf weniger gekommen seid, liegt es wahrscheinlich daran, dass ihr das Wort „OF“ zwar mitgelesen, aber nicht richtig wahrgenommen habt, dass es auch ein „F“ enthält. Es gibt 3 „OF“ in diesem Text.

2. Das Ziel unserer Arbeit und erste Ergebnisse

Unser Ziel ist es herauszufinden, welche Wörter noch überlesen werden und ob es einen Unterschied macht, wenn der Text auf Deutsch ist.

Dazu haben zuerst einen eigenen Text geschrieben:

EINBRUCH IN BERLIN

BEI EINEM EINBRUCH IN EINE

FILIALE IN DEUTSCHLANDS HAUPTSTADT

BERLIN IST EIN EINBRECHER IN FLAGRANTI

ERTAPPT WORDEN

Wir haben dabei versucht, den Buchstaben N in dem Wort „IN“ zu verstecken. Wir haben geglaubt, dass das Wort „IN“ meistens überlesen wird, da es wie das Wort „OF“ so kurz ist.

Wir haben unseren Text 20 Schülern vorgelegt. Leider haben 7 davon die richtige Anzahl gezählt. Vielleicht lag es daran, dass man das Wort „IN“ besser hört als „OF“ oder weil man im Deutschen Wörter nicht so einfach überliest wie im Englischen. Eigentlich sollten die meisten 9 „n“ zählen, weil es vier „IN“ gibt. Das hat aber nur einer gezählt.

Die Tabelle zeigt alle Ergebnisse:

gezählte „N“	**Anzahl Schüler**
9	**1**
10	**1**
11	**0**
12	**0**
13	**5**
14	**4**
15	**7**
16	**0**
17	**2**

Zwei Schüler haben sogar 17 „n“s gezählt. Woran das liegt können wir leider nicht feststellen.

3. Unser zweiter Versuch

Dieses mal haben wir uns überlegt, dass wir den Buchstaben „C“ verstecken, weil er meistens in einem „SCH“ oder „CH“ ist und deswegen nicht so gut gehört wird. Wir haben auch die Vermutung aufgestellt, dass das „C“ in der Mitte eines Wortes weniger auffällt.

Unser neuer Text :

AUCH HEUTE IST EIN SCHÖNER TAG!

STATT CHEMIE HATTEN WIR HEUTE EINE

FREISTUNDE DESWEGEN SIND WIR MIT SECHS

SCHÜLERN IN DIE CITY GEGANGEN UND

HABEN IN KENTUCKY FRIED CHICKEN GEGESSEN.

In dem Text sind 8 „C“. Wir haben diesen Text Schülern der siebten Klasse vorgelegt, aber leider hat wieder ein Großteil der Schüler alle „C“ gezählt oder nur ein „C“ übersehen.

Die Tabelle zeigt alle Ergebnisse:

gezählte „C“	**Anzahl Schüler**
5	**2**
6	**1**
7	**6**
8	**6**
9	**8**

Wir können also die Ergebnisse bei dem englischen Text mit unseren Texten nicht bestätigen.

4. Wir machen den Test

Aber bevor wir mit unserer Untersuchung aufgehört haben, haben wir noch den Originaltext oben ausprobiert, um zu schauen ob das nur an unseren Texten liegt oder ob die Schüler am MPG einfach zu aufmerksam sind. Unsere Ergebnisse aus einer neunten Klasse sind in der folgenden Tabelle fest gehalten:

gezählte „F“	**Anzahl Schüler**
2	**1**
3	**9**
4	**5**
5	**4**
6	**4**

Pech gehabt! Auf den englischen Text fallen sehr viele Schüler herein. Das „F“ in „OF“ wird überlesen. Warum es in den deutschen Texten nicht klappt, können wir leider nicht erklären.

5. Wer kann das lesen?

Wir haben mit Texten noch ein ähnliches Thema gefunden. Versucht mal den folgenden Text (Quelle: http://www.htw-aalen.de/studium/fr/n2704_usability-labor_/content.php? id=4151, Juni 2014) zu lesen.

Luat enier sidtue an eienr uvrsnäiett,

ist es eagl, in wcheler rhnfgeeloie die

bstuchbaen in eniem wrot snid. Das eniizg

whictgie ist, dsas der etrse und der lztete

bstuchbae am rtigeichn paltz snid. Der

rset knan tatol deiuranchnedr sien und

man knan es ienrmomch fsat onhe porbelm

lseen. Das legit daarn, dsas wir nhcit jeedn

bstuchbaen aeilln lseen, srednon das wrot

als gzanes.

Obwohl die Buchstaben vertauscht sind kann man es ganz einfach lesen. Das ist schwierig, aber es geht, wenn man sich erst mal eingelesen hat.

Es wäre interessant zu prüfen, ob es egal ist, wie die Buchstaben in den Wörtern vertauscht sind. Man könnte auch untersuchen, auf wie viele Arten man die Buchstaben vertauschen kann oder …

Bera sda sit andn ederiw niee naeder Atrbie!

Zerlegung von Rechtecken in eine möglichst kleine Zahl von Quadraten

(Idee nach: Wettbewerb Känguru, 2012, Klassenstufen 5 und 6)

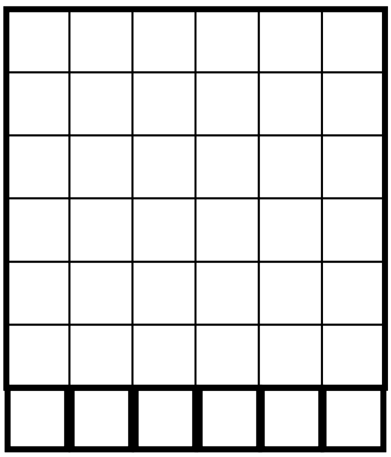
1. Einleitung

In unserem Problem geht es darum, dass wir ein Rechteck, das aus 6 x 7 kleinen Quadraten besteht, mit möglichst wenigen Quadraten ganz ausfüllen.

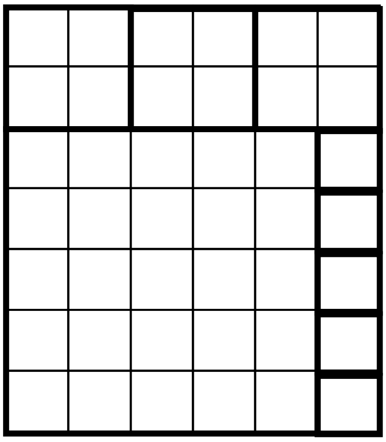
Dabei können wir die Lösungen im Känguruheft auf Seite 20 verwenden und die Ergebnisse aus einem Artikel im letzten MadMax. Wir haben dann die Rechteckgröße abgeändert und dafür eigene Lösungen gesucht.

2. Die Lösung des Problems

Die erste Idee ist, mit einem möglichst großen Quadrat zu beginnen. Dann erhält man 7 Quadrate, nämlich ein großes 6x6 Quadrat und 6 kleine 1x1Quadrate.



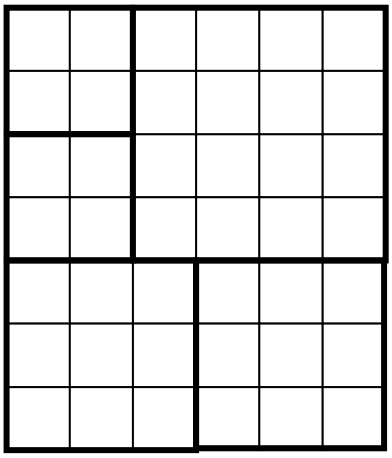
7 Quadrate



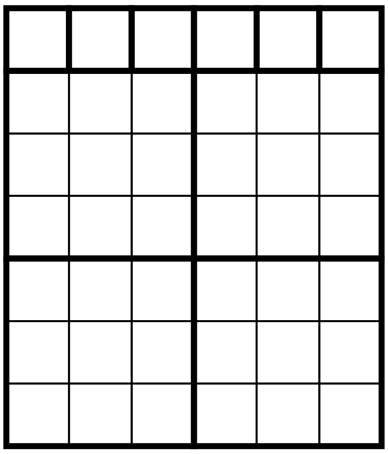
9 Quadrate

Wenn man mit einem kleineren 5x5 Quadrat anfängt, dann bekommt man 9 Quadrate, diese sind folgende: das 5x5 Quadrat, drei 2x2 Quadrate und fünf 1x1 Quadrate.

Aber wenn man mit einem 4x4 Quadrat beginnt, dann kann man zwei 3x3 Quadrate und zwei 2x2 Quadrate um das 4x4 Quadrat herumbauen und hat insgesamt nur fünf Quadrate. Das ist unser bestes Ergebnis.



5 Quadrate



10 Quadrate

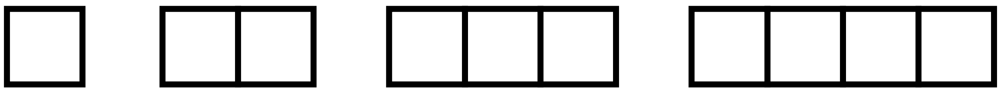
Wenn man ein 3x3 Quadrat benutzt, dann wird es wieder schlimmer, weil man vier 3x3 Quadrate, dann sechs 1x1 Quadrate einsetzen muss und so erhält man zehn Quadrate.

3. Systematische Untersuchung von Rechtecken

In diesem Abschnitt wollen wir weitere Rechtecke einteilen und systematisch untersuchen.

3.1 Rechtecke mit Breite 1

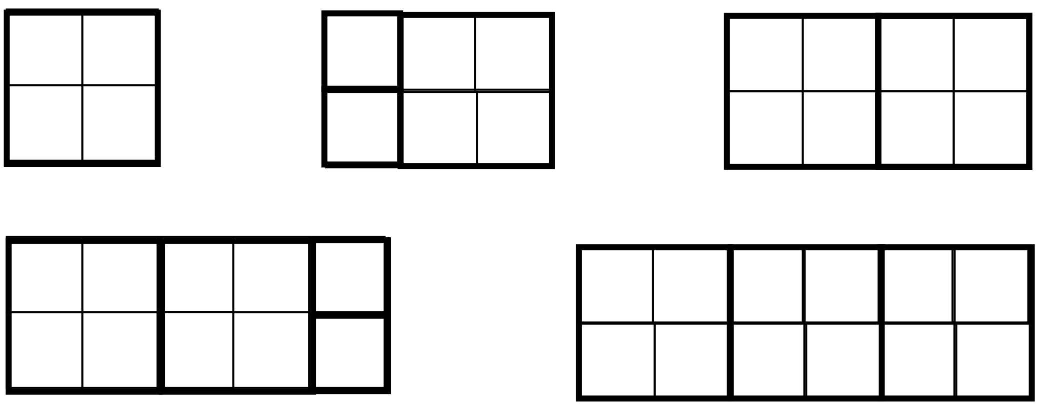
In diesem Kapitel nehmen wir nur Rechtecke mit den Maßen: 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4 usw.



Hier muss man genauso so viele Quadrate benutzen wie es groß ist.

3.2 Rechtecke mit Breite 2

Interessanter wird es bei 2 x 2, 2 x 3, 2 x 4 usw.

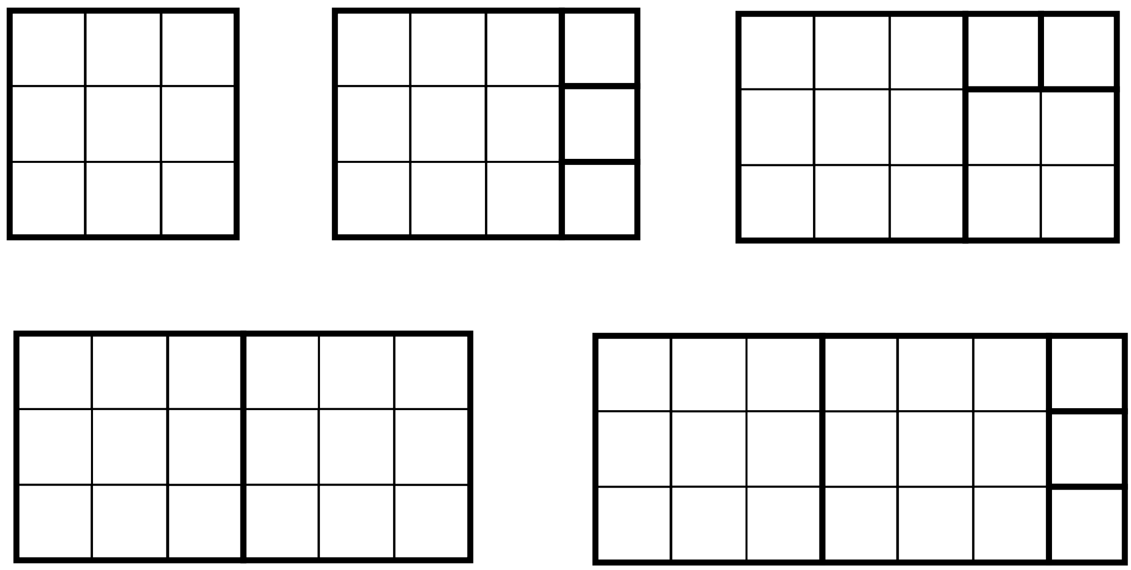


Breite	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Anzahl	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6	8

Die Tabelle zeigt die kleinste Anzahl an Quadraten, in die man das 3xn Rechteck einteilen kann. Dabei haben wir eine Systematik herausgefunden, diese lautet: +2-1+2-1+2-1 usw. Eine andere Systematik ist, dass bei jeder geraden Zahl genau die Hälfte von den Quadraten in das Rechteck passt. Das ist so, weil dann die 2 x 2 Quadrate genau reinpassen.

3.3 Rechtecke mit Breite 3

Nun wird es langsam richtig interessant bei 3x3, 3x4, 3x5 usw.



Breite	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Anzahl	1	4	4	2	5	5	3	6	6	4	7

Dabei haben wir folgende Systematik herausgefunden:
+3 +0 -2 +3 +0 -2 usw.

Vielleicht untersuchen wir auch noch die 4xn Rechtecke.